



CONCORSO PER L'ASSUNZIONE DI 4 LAUREATI CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE  
STATISTICO-ATTUARIALI E/O MATEMATICO-FINANZIARIE  
PROVA SCRITTA DEL 14 DICEMBRE 2021

VERSIONE A

Il candidato svolga due tracce a scelta tra i seguenti quattro quesiti:

• TRACCE DI PROBABILITÀ E INFERENZA STATISTICA

QUESITO 1

Il candidato esponga sinteticamente:

- le proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza;
- il legame tra funzione di verosimiglianza e distribuzioni a posteriori.
- Sia dato un campione di osservazioni i.i.d.  $(X_1, \dots, X_n)$  da una v.a.  $X$  con distribuzione di legge gamma di parametri  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}$$

con  $x, \alpha$  e  $\beta > 0$  e  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \cdot e^{-z} \cdot dz$

Il candidato ricavi:

- il vettore  $(T_1, T_2)$  di statistiche sufficienti per il parametro vettoriale  $(\alpha, \beta)$ ;
- il sistema di equazioni per ottenere le stime di massima verosimiglianza di  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- la funzione di densità e il supporto della variabile casuale  $Y = \ln(X)$ .

QUESITO 2

a) Il candidato discuta il Teorema del Limite Centrale, illustrandone brevemente ipotesi fondative e principali applicazioni.

b) Secondo il candidato il Teorema del Limite Centrale è adatto allo studio di perdite assicurative o finanziarie a bassa frequenza e alto impatto? Quale potrebbe essere un altro riferimento teorico valido a questo fine?

c) In un grande bacino idrico sono disperse delle particelle inquinanti, di piccole dimensioni e non interagenti, di due tipi distinti: il numero medio di particelle di tipo A per  $\text{cm}^3$  di acqua è  $\mu_A = 3,2$ ; il numero medio di particelle di tipo B per  $\text{cm}^3$  di acqua è  $\mu_B = 2,8$ .

Si supponga che il numero di particelle disperse in acqua si distribuisca secondo una legge poisson e che il numero di particelle di tipo A sia indipendente dal numero di particelle del tipo B.

Il candidato determini:

- avendo osservato in un  $\text{cm}^3$  d'acqua 4 particelle, la probabilità che siano tutte di tipo A;
- la probabilità di trovare una sola particella (A o B) in un  $\text{cm}^3$  di acqua;
- utilizzando un'opportuna approssimazione, motivandone la scelta, la probabilità di trovare almeno 551 particelle in  $100 \text{ cm}^3$  di acqua.

13 107 01

14 01 10 15 16 17

Ove necessario si tengano presenti i seguenti valori:

$\Phi(0) = 0,5$	$\Phi(0,6) = 0,7257$	$\Phi(1,2) = 0,8849$	$\Phi(1,8) = 0,9641$	$\Phi(2,4) = 0,9918$
$\Phi(0,1) = 0,5398$	$\Phi(0,7) = 0,758$	$\Phi(1,3) = 0,9032$	$\Phi(1,9) = 0,9713$	$\Phi(2,5) = 0,9938$
$\Phi(0,2) = 0,5793$	$\Phi(0,8) = 0,7881$	$\Phi(1,4) = 0,9192$	$\Phi(2) = 0,9772$	$\Phi(2,6) = 0,9953$
$\Phi(0,3) = 0,6179$	$\Phi(0,9) = 0,8159$	$\Phi(1,5) = 0,9332$	$\Phi(2,1) = 0,9821$	$\Phi(2,7) = 0,9965$
$\Phi(0,4) = 0,6554$	$\Phi(1) = 0,8413$	$\Phi(1,6) = 0,9452$	$\Phi(2,2) = 0,9861$	$\Phi(2,8) = 0,9974$
$\Phi(0,5) = 0,6915$	$\Phi(1,1) = 0,8643$	$\Phi(1,7) = 0,9554$	$\Phi(2,3) = 0,9893$	$\Phi(2,9) = 0,9981$

dove  $\phi(x)$  funzione di ripartizione di una distribuzione normale standard.

• **TRACCE DI TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI VITA E DANNI**

**QUESITO 3**

Una polizza di assicurazione caso vita si conclude alla scadenza contrattuale. Esistono, tuttavia, casi in cui il contratto si conclude prima della sua naturale scadenza oppure si presenti alla sua conclusione modificato in uno o più elementi a seguito di scelte operate dal contraente. Il candidato:

- a. illustri le principali modifiche contrattuali che possono intervenire in una polizza vita con particolare riguardo alle operazioni di riscatto, riduzione, e trasformazione;
- b. descriva i casi di aumento delle prestazioni e di opzione in rendita e capitale;
- c. svolga il seguente esercizio.

Sia  $C=1.000$  il capitale assicurato di una polizza a capitalizzazione non rivalutabile a premio annuo di durata 10 anni e tasso tecnico del 3% relativa ad un assicurato di 35 anni. Tenuto conto che alla polizza si applica il metodo proporzionale e che il contratto non può essere stornato prima del 3° anno si calcoli:

- i) il capitale ridotto al 4° anno di durata contrattuale;
- ii) il valore di riscatto al 2° e 5° anno di durata contrattuale sapendo e che dal 3° al 5° anno l'estinzione anticipata del contratto comporta una penalizzazione del 2%;
- iii) l'importo del nuovo capitale assicurato relativo ad una trasformazione della polizza al 5° anno di durata contrattuale in una tariffa mista ordinaria a premio unico con medesima scadenza della polizza principale. Al riguardo si ipotizzi che l'operazione di trasformazione avvenga senza spese e che si conoscano i seguenti valori attuariali relativi a un soggetto di età  $x$  e durata  $n$ :

Valori attuariali di un'assicurazione mista ordinaria relativi ad un assicurato di età $x$ e durata $n$			
$A(35:1)$	0,970896	$A(40:1)$	0,970899
$A(35:5)$	0,863118	$A(40:5)$	0,863256
$A(35:10)$	0,746077	$A(40:10)$	0,746862
$A(35:15)$	0,646454	$A(40:15)$	0,648662

Nei conteggi si consideri per i valori attuariali un arrotondamento alla sesta cifra decimale e per gli importi un arrotondamento alla seconda cifra decimale.

*in DIF*

*Handwritten signatures and initials*