IVASS
ISTITUTO PER LA VIGILANZA SULLE ASSICURAZIONI

CONCORSO PER L'ASSUNZIONE DI 4 LAUREATI CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE STATISTICO-ATTUARIALI E/O MATEMATICO-FINANZIARIE
PROVA SCRITTA DEL 14 DICEMBRE 2021

VERSIONE C

Il candidato svolga due tracce a scelta tra i seguenti quattro quesiti:

- **TRACCE DI PROBABILITÀ E INFERENZA STATISTICA**

QUESITO 1

a) Il candidato discuta il Teorema di Bayes, illustrandone brevemente ipotesi fondative e principali applicazioni.

b) Ad un campo di tiro militare un soldato si sta esercitando a sparare ad un bersaglio posizionato sopra un carrello che si sposta su un binario che va dal punto A al punto B. Il tragitto è suddiviso in 4 parti più piccole, indicate con K1, K2, K3, K4. Ad un certo punto dell'esercitazione il dispositivo di mira a disposizione del soldato si guasta; al momento del tiro, quindi, non è più possibile sapere dove si trova precisamente il bersaglio. Si conoscono però le probabilità che il bersaglio si trovi all'interno di una delle 4 parti del tragitto elencate sopra:

$$P(K1) = 0{,}6;\ \ P(K2) = P(K4) = 0{,}125;\ \ P(K3) = 0{,}15.$$

Non essendo un tiratore infallibile, il soldato ha solo una probabilità di 2/5 di centrare il bersaglio se si trova in K3, una probabilità di 1/5 se si trova in K2, 1/5 se si trova in K4, 1/10 se si trova in K1 e 1/10 di mancare del tutto le 4 parti del tragitto.

Il candidato determini:

i. la probabilità che il soldato colpisca il bersaglio;
ii. nell'ipotesi che il soldato colpisca il bersaglio, la probabilità che il bersaglio si trovi in K2;
iii. nell'ipotesi che il soldato non colpisca il bersaglio, la probabilità che il bersaglio si trovi in K4.

QUESITO 2

Sia dato il seguente modello di regressione lineare multipla:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

dove y è la variabile dipendente, X è la matrice contenente k variabili esplicative (inclusa l'intercetta) ed ε la parte erratica del modello, il candidato:

1. illustri sinteticamente le principali proprietà dello stimatore dei minimi quadrati OLS;
2. ricavi l'espressione per lo stimatore OLS per β;

Considerando il caso particolare $k = 2$ e cioè della regressione lineare semplice:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

e noto che $n = 30$, $\sum_i x_i = 798$, $\sum_i y_i = 1001$, $\sum_i x_i^2 = 21520$, $\sum_i y_i^2 = 33681$, $\sum_i y_i x_i = 26855$

3. determini la stima puntuale e lo *standard error* degli stimatori OLS $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

- **TRACCE DI TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI VITA E DANNI**

QUESITO 3

Nel corso della durata contrattuale di una polizza vita l'equilibrio tra premi e prestazioni è garantito dalla determinazione della riserva matematica. Il candidato:

a. illustri il concetto di riserva matematica prospettiva pura con riferimento alle principali forme tariffarie caso vita, relative ad una testa assicurata, sia a premio unico che a premio annuo;
b. descriva il profilo temporale della riserva matematica di un'assicurazione temporanea caso morte e di un'assicurazione di tipo misto, con riferimento ad una testa assicurata.
c. risolva il seguente esercizio.

Si consideri una polizza di assicurazione sulla vita di tipo mista ordinaria a premio annuo relativa ad un assicurato di anni 40. Siano disponibili i seguenti valori attuariali di una polizza mista ordinaria relativi ad un assicurato di età x e durata n anni:

Valori attuariali di un'assicurazione mista ordinaria relativi ad un assicurato di età x e durata n			
A(40:1)	0,970899	A(41:9)	0,768839
A(40:2)	0,942697	A(42:8)	0,791480
A(40:3)	0,915371	A(43:7)	0,814813
A(40:4)	0,888897	A(44:6)	0,838861
A(40:5)	0,863256	A(45:5)	0,863653
A(40:6)	0,838425	A(46:4)	0,889224
A(40:7)	0,814387	A(47:3)	0,915600
A(40:8)	0,791124	A(48:2)	0,942820
A(40:9)	0,768622	A(49:1)	0,970935
A(40:10)	0,746862		

e si abbiano a disposizione le seguenti annualità di rendita vitalizia anticipata temporanea relative ad un assicurato di età x e durata n anni:

annualità di rendita vitalizia temporanea anticipata di un assicurato di età x e durata n anni			
$\ddot{a}(40:1)$	1,000000	$\ddot{a}(41:9)$	7,947653
$\ddot{a}(40:2)$	1,969178	$\ddot{a}(42:8)$	7,169677
$\ddot{a}(40:3)$	2,908344	$\ddot{a}(43:7)$	6,367866
$\ddot{a}(40:4)$	3,81828	$\ddot{a}(44:6)$	5,541373
$\ddot{a}(40:5)$	4,699725	$\ddot{a}(45:5)$	4,689229
$\ddot{a}(40:6)$	5,553376	$\ddot{a}(46:4)$	3,810173
$\ddot{a}(40:7)$	6,379931	$\ddot{a}(47:3)$	2,903245
$\ddot{a}(40:8)$	7,179989	$\ddot{a}(48:2)$	1,967136
$\ddot{a}(40:9)$	7,954061	$\ddot{a}(49:1)$	1,000000
$\ddot{a}(40:10)$	8,702694		

Si chiede di determinare il valore della riserva matematica di una polizza mista ordinaria a premio annuo relativa ad un assicurato di età 40 anni con durata contrattuale pari a 10 anni al 4° anno e al 4,5° di anniversario di contratto, tenuto conto che il capitale iniziale assicurato, pari a 1.000, rimane costante per l'intera durata della polizza e che il tasso di premio annuo puro della tariffa di tipo mista ordinaria è 0,08582.
Nei conteggi si consideri per i valori attuariali un arrotondamento alla sesta cifra decimale e per gli importi un arrotondamento alla seconda cifra decimale.

QUESITO 4

In un contratto di assicurazione contro i danni l'assicuratore, dietro pagamento di un premio, si impegna a risarcire l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro. Il candidato, con riferimento ad un contratto di assicurazione contro i danni da responsabilità civile, in cui per ogni polizza è possibile osservare un numero aleatorio di sinistri di importi aleatori:

1. descriva l'impostazione teorica del calcolo del premio, ricavandone l'espressione di media e varianza;
2. risolva il seguente esercizio:

a. Dato un portafoglio di $r = 100$ rischi omogenei, si supponga di aver osservato nel periodo di un anno $n = 10$ sinistri, il cui costo è elencato in tabella. Si determini la frequenza sinistri, l'indice di ripetibilità, il costo medio per sinistro e la quota danni.

elenco polizze	**elenco sinistri**	**costo sinistri in €**
p1	a1	500
p1	a2	1.000
p1	a3	800
p2	a4	450
p2	a5	350
p3	a6	600
p3	a7	700
p4	a8	1.100
p5	a9	200
p6	a10	300

b. Il candidato determini il premio di tariffa ipotizzando un caricamento di sicurezza del 3% rispetto al premio equo, caricamento per costi di acquisizione e di gestione rispettivamente pari al 15% e 5% del premio di tariffa.

Il candidato svolga due tracce a scelta tra i seguenti quattro quesiti:

- **TRACCE DI ELEMENTI DI BASE SUI METODI QUANTITATIVI PER LA MISURAZIONE E GESTIONE DEI RISCHI**

QUESITO 5

Prendendo a riferimento un mercato finanziario perfetto, completo e privo di arbitraggi, si considerino opzioni di tipo europeo scritte su titoli azionari che non pagano dividendi.

Il candidato:

1. illustri le ipotesi del modello di Black e Scholes, e delinei il percorso logico seguito dagli autori per valutare il prezzo di una opzione call:

$$C(t, S_t) = S_t\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r\,(T-t)}\,\Phi(d_2), \qquad \mathrm{d}_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

dove t è l'istante di valutazione, S_t è il prezzo del titolo azionario, T è la scadenza dell'opzione, K è il prezzo d'esercizio, r è il tasso spot, σ la volatilità del titolo azionario e $\Phi(x)$ la funzione di ripartizione di una normale standard;

2. in riferimento al prezzo della call descriva cosa si intende per "volatilità implicita" e ne discuta esistenza e unicità;
3. ricordando che nel modello di Black e Scholes, sotto la misura di probabilità *naturale*, la distribuzione di probabilità del rendimento logaritmico $ln[S(t+\Delta t)/S(t)]$ è una distribuzione normale di media $(\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t$ e varianza $\sigma^2\,\Delta t$:

$$ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right) \sim \mathrm{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right),$$

calcoli la probabilità *naturale* che l'opzione sia "*out of the money*" alla scadenza, assumendo $\Delta t = 4$ anni, $K = 100$ euro, $S(t) = 100$ euro, $\mu = 0{,}10625$, $\sigma = 0{,}25$ (valori espressi su base annua).

Ove necessario, si tenga presente che:

$\Phi(0{,}0) = 0{,}5000$,	$\Phi(0{,}6) = 0{,}7257$,	$\Phi(1{,}2) = 0{,}8849$,	$\Phi(1{,}8) = 0{,}9641$,	$\Phi(2{,}4) = 0{,}9918$,
$\Phi(0{,}1) = 0{,}5398$,	$\Phi(0{,}7) = 0{,}7580$,	$\Phi(1{,}3) = 0{,}9032$,	$\Phi(1{,}9) = 0{,}9713$,	$\Phi(2{,}5) = 0{,}9938$,
$\Phi(0{,}2) = 0{,}5793$,	$\Phi(0{,}8) = 0{,}7881$,	$\Phi(1{,}4) = 0{,}9192$,	$\Phi(2{,}0) = 0{,}9772$,	$\Phi(2{,}6) = 0{,}9953$,
$\Phi(0{,}3) = 0{,}6179$,	$\Phi(0{,}9) = 0{,}8159$,	$\Phi(1{,}5) = 0{,}9332$,	$\Phi(2{,}1) = 0{,}9821$,	$\Phi(2{,}7) = 0{,}9965$,
$\Phi(0{,}4) = 0{,}6554$,	$\Phi(1{,}0) = 0{,}8413$,	$\Phi(1{,}6) = 0{,}9452$,	$\Phi(2{,}2) = 0{,}9861$,	$\Phi(2{,}8) = 0{,}9974$,
$\Phi(0{,}5) = 0{,}6915$,	$\Phi(1{,}1) = 0{,}8643$,	$\Phi(1{,}7) = 0{,}9554$,	$\Phi(2{,}3) = 0{,}9893$,	$\Phi(2{,}9) = 0{,}9981$,

essendo $\Phi(x)$ la funzione di ripartizione di una distribuzione normale standard.

QUESITO 6

Il candidato:

1. discuta il tema dell'immunizzazione di portafogli finanziari esposti al rischio di tasso di interesse, con particolare riferimento al teorema di Fisher e Weil e alle possibili incongruenze con il principio di assenza di arbitraggio.

Successivamente, consideri un mercato finanziario perfetto caratterizzato dalle ipotesi di non frizionalità, competitività e assenza di rischio di insolvenza; su tale mercato vengono emessi, all'istante $t=0$, i seguenti quattro titoli obbligazionari, aventi tutti valore nominale $N = 100{,}00$ euro:

a) un titolo a cedola nulla, con scadenza in $T_1 = 1$ anno e prezzo 98,00 euro;
b) un titolo a tasso fisso, con cedola annuale pari a 4,00 euro, scadenza $T_2 = 2$ anni e prezzo di emissione 100,00 euro;
c) un titolo a tasso fisso, con cedola annuale pari a 6,00 euro, scadenza $T_3 = 3$ anni e prezzo di emissione 100,00 euro;
d) un titolo a tasso fisso, con cedola annuale pari a 8,00 euro, scadenza $T_4 = 4$ anni e prezzo di emissione 100,00 euro.

Il candidato determini:

2. la struttura per scadenza dei tassi di interesse $i(0, t)$ per $t=\{1, 2, 3, 4\}$ anni;
3. la *duration* (di Macaulay) del titolo a tasso fisso con scadenza $T = T_3 = 3$ anni;
4. il tasso interno di rendimento del titolo a tasso fisso con scadenza $T = T_3 = 3$ anni.

IVASS
ISTITUTO PER LA VIGILANZA
SULLE ASSICURAZIONI

- **TRACCE DI ECONOMIA DELLE IMPRESE DI ASSICURAZIONE**

QUESITO 7
Nella gestione dei grandi rischi l'assicuratore si avvale di forme di mitigazione del rischio. Il candidato esponga:

a. le operazioni di riassicurazione e coassicurazione;
b. i principali trattati di riassicurazione e i piani di ritenzione;
c. le possibili forme di trasferimento dei rischi assicurativi sul mercato dei capitali: *cat bond*, *cat derivative* e *longevity bond.*

QUESITO 8
Nel settore finanziario il capitale svolge un ruolo del tutto peculiare. Il candidato esponga:

a) la differente funzione assolta dal capitale nell'ambito di una generica impresa e all'interno di una compagnia di assicurazione;
b) quali sono le ragioni che hanno portato all'attuale regime *Solvency II*;
c) cosa è e qual è la funzione del *Minimum Capital Requirement* del nuovo sistema regolamentare europeo *Solvency I.*

TRACCIA DI LINGUA INGLESE
(Il candidato sviluppi la traccia in non più di una pagina)

Social networks and shared platforms are increasingly used in the workplace. Discuss the pros and cons.