



ISVAP

Istituto per la Vigilanza sulle Assicurazioni Private e di Interesse Collettivo

**I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri:
un approccio al comparto auto italiano**

Ottobre 2006

I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri: un approccio al comparto auto italiano

Ottobre 2006

Lo studio è stato condotto da un gruppo di lavoro composto da Lino Matarazzo, Stefano Cavastracci e Stefano Pasqualini - ISVAP; Massimo De Felice Università di Roma “La Sapienza” e Franco Moriconi, Università di Perugia.

Le opinioni espresse in questo lavoro non riflettono necessariamente il punto di vista dell'ISVAP.

Per informazioni si prega di contattare: sezione.studi @isvap.it - Fax: +39 06 421333735

Indice

1	INTRODUZIONE E SINTESI	9
1.1	L'impostazione dello studio	10
1.2	Le scelte metodologiche	10
1.3	Sintesi dei risultati	12
1.3.1	Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi storici	12
1.3.2	Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi correnti	14
1.3.3	Il progetto <i>Solvency II</i> : il <i>framework</i> per la definizione e il calcolo dei requisiti di riserva e del <i>reserve risk capital</i>	14
1.3.4	Le definizioni alternative di <i>risk margin</i>	16
1.3.5	Calcolo del <i>risk capital</i> e del <i>risk margin</i> secondo i diversi approcci	17
1.3.6	Alcuni risultati numerici sulla sufficienza delle riserve	18
1.3.7	<i>Benchmark</i> non scontati	18
1.3.8	<i>Benchmark</i> scontati	19
2	GLI OBIETTIVI DELLO STUDIO	20
2.1	I metodi attuariali per la riserva sinistri	20
2.2	Modelli e dati utilizzati	21
3	I MODELLI STOCASTICI PER LA RISERVA SINISTRI NELLO STUDIO	23
3.1	I modelli per la misurazione e controllo della riserva sinistri: deterministici o stocastici?	23
3.2	Il <i>chain-ladder</i> tradizionale	26
3.3	Le versioni stocastiche del <i>chain-ladder</i> utilizzate nello studio	31
3.3.1	Il modello di Mack	31
3.3.2	Il Modello di Poisson con sovradisersione	34
4	REQUISITI DI RISERVA E DI CAPITALE PER LE PASSIVITÀ DANNI	39
4.1	L'impostazione del problema secondo <i>Solvency II</i>	39
4.2	Un caso semplificato: passività in unica scadenza e senza sconto	41
4.2.1	Riserva sinistri regolamentare non scontata	42
4.2.2	Best estimate	42
4.2.3	Fair value e risk margin	42

4.2.4	Il requisito di capitale per il rischio di insufficienza della riserva sinistri (<i>reserve risk capital</i>)	43
4.2.5	Esempi	45
4.3	Il caso reale: riserva e capitale di sicurezza per prestazioni distribuite nel tempo . . .	46
4.3.1	Il <i>fair value</i> delle passività	47
4.3.2	Il valore attuale atteso delle passività	48
4.3.3	La riserva come <i>fair value</i> delle passività	49
4.3.4	Casi particolari	49
4.3.5	Il <i>risk capital</i> di riserva nella logica dell'orizzonte annuale	50
4.3.6	Misure di <i>risk capital</i> approssimate	52
4.3.7	Il problema della subadditività del <i>risk margin</i>	56
4.4	Utilizzo del <i>risk capital</i> per definire il <i>risk margin</i>	59
4.4.1	Il costo del <i>risk capital</i>	59
4.4.2	L'ipotesi " <i>ongoing</i> "	60
4.4.3	Il <i>risk margin</i> come costo del <i>risk capital</i>	61
4.4.4	Il costo del capitale secondo il <i>risk capital</i> calcolato con le approssimazioni YEE e LM	61
4.4.5	Tavola sintetica dei diversi approcci e approssimazioni	63
5	ANALISI DELLE RISERVE SINISTRI DEL COMPARTO AUTO ITALIANO	67
5.1	Applicazione ai dati reali del comparto auto italiano	67
5.2	Applicazione ai dati storici dei pagamenti. Riserve a costo ultimo	69
5.2.1	Raffronto tra i risultati delle due metodologie stocastiche	70
5.2.2	I <i>risk margin</i> e la loro incidenza sulla <i>best estimate</i>	71
5.2.3	Livello implicito di prudenza delle riserve sinistri	74
5.3	Analisi del mercato auto per fasce dimensionali	77
5.3.1	Ramo RCA: analisi per fasce di mercato	77
5.3.2	Ramo CVT: analisi per fasce di mercato	81
5.4	Riserve attualizzate	82
5.4.1	Il <i>risk margin</i> e la loro incidenza sulla <i>best estimate</i>	82
5.4.2	Livello implicito di prudenza delle riserve sinistri	85
5.4.3	Impatto del <i>discounting</i> sui <i>benchmark</i> e sul livello implicito di prudenza delle riserve sinistri RCA 2004	88
5.5	Applicazione ai dati dei pagamenti in valuta corrente	88
5.5.1	Il problema dell'inflazione nel calcolo della riserva	88
5.5.2	Trattamento degli effetti inflattivi	89

5.5.3	Stima dell'inflazione storica del ramo RCA	89
5.5.4	Un aggiustamento per i cambiamenti nella velocità di liquidazione	90
5.5.5	Selezione della serie storica dell'inflazione di ramo	91
5.5.6	Applicazione del <i>chain-ladder</i> ai dati a costi correnti	92
5.6	Applicazione dei modelli con inflazione stocastica ai dati rivalutati	92
5.6.1	Risultati dai modelli con inflazione stocastica	93
5.7	Il calcolo del <i>risk capital</i> e del <i>risk margin</i> secondo i diversi approcci	97
5.7.1	<i>risk margin</i> e requisiti di riserva.	97
5.7.2	<i>Risk capital</i> di riserva, dati i <i>risk margin</i>	97
5.7.3	<i>Risk capital</i> e <i>risk margin</i> come costo del capitale.	99
5.8	Un confronto coi requisiti di capitale nei QIS2	100
5.9	Conclusioni	105
5.9.1	I modelli stocastici	105
5.9.2	Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi correnti	107
5.10	Il progetto <i>Solvency II</i> : il <i>framework</i> per la definizione e il calcolo dei requisiti di riserva e del <i>reserve risk capital</i>	108
5.10.1	Definizioni alternative di <i>risk margin</i>	110
5.10.2	Il calcolo del <i>risk capital</i> e del <i>risk margin</i> secondo i diversi approcci	111
5.11	Una sintesi dei risultati sul comparto auto italiano	111
5.11.1	<i>Benchmark</i> non scontati	111
5.11.2	<i>Benchmark</i> scontati	112
	Bibliografia	114

Elenco delle tabelle

4.1	Definizione di Riserva regolamentare e di <i>risk margin</i> : metodo esatto e approssimazioni (R^* come percentile)	64
4.2	Metodi di valutazione del <i>risk capital</i> con l'approccio YEE e LM: si definisce il RAV (il <i>risk loading</i> γ_1 è già assegnato)	65
4.3	Metodi di valutazione del <i>risk margin</i> e del <i>risk capital</i> con l'approccio YEE e LM (si definisce il RAV e si assegna lo <i>spread</i>	66
5.1	Fattori di sconto e tassi <i>risk-free</i> al 31.12.2004	69
5.2	Percentili e coefficienti di variazione nel modello ODP e nel modello DFCL	72
5.3	Modello ODP: <i>risk margin</i> come quantili e come costo del capitale	73
5.4	Insufficienze di riserva rispetto ai <i>benchmark</i> non scontati	76
5.5	Eccedenze di riserva rispetto ai <i>benchmark</i> non scontati	77
5.6	Le fasce di riserva	78
5.7	Ramo RCA: variabilità delle OLL aggregate per fasce di riserva	78
5.8	Ramo CVT: variabilità delle OLL aggregate per fasce di riserva	81
5.9	Modello ODP: <i>risk margin</i> come quantili e come costo del capitale	83
5.10	Modello ODP con <i>discounting</i> : <i>risk margin</i> come quantili e come costo del capitale	84
5.11	Insufficienze di riserva rispetto ai <i>benchmark</i> scontati	87
5.12	Eccedenze di riserva rispetto ai <i>benchmark</i> scontati	87
5.13	Metodo ODP – Valutazioni a costo ultimo	88
5.14	Metodo ODP – Valutazioni scontate	88
5.15	Tassi di inflazione storici	90
5.16	Neutralizzazione dell'inflazione storica: effetti sulla <i>best estimate</i>	92
5.17	Modello ODP con inflazione stocastica: differenze rispetto ai valori non inflattivi	94
5.18	Modello DFCL con inflazione stocastica: differenze rispetto ai valori non inflattivi	95
5.19	Modello ODP con inflazione stocastica: effetti sui requisiti di riserva	96
5.20	Modello DFCL con inflazione stocastica: effetti sui requisiti di riserva	96
5.21	Livelli di <i>risk margin</i> , essendo la riserva regolamentare definita come 75-esimo e 90-esimo percentile delle OLL.	98
5.22	<i>Risk capital</i> ricavati come percentile al 99,5%, dati i <i>risk margin</i> ricavati come 75-esimo e 90-esimo percentile.	98

5.23 *Risk margin* come costo del capitale ricavato dal percentile al 99,5% (*spread* al 6%). 99

5.24 *Risk capital* di riserva in percentuale della *BE* non scontata. Valori QIS2 e da modelli
stocastici secondo differenti approcci 103

CAPITOLO 1. INTRODUZIONE E SINTESI

La potenziale sottostima degli impegni di rimborso in-essere (*Outstanding Loss Liabilities*, OLL), e la conseguente insufficienza della riserva sinistri, costituisce una considerevole fonte di rischio per le imprese di assicurazione contro i danni e le metodologie attuariali sono, da tempo, parte integrante dello specifico processo di valutazione (e del *judgement* professionale attuariale), specialmente per i rami a lenta liquidazione. Un argomento tra i più dibattuti negli ultimi due decenni nella letteratura e nella pratica attuariale internazionale dell'assicurazione danni, riguarda l'utilizzo, ai fini della costituzione o del controllo a posteriori della riserva sinistri, di metodologie di "riservazione" (*loss reserving models*) di tipo stocastico o deterministico. Le prime, a fronte di una minore maneggevolezza operativa e di ipotesi più impegnative sui dati di base, offrono il vantaggio di fornire, in aggiunta alla stima puntuale della riserva (*best estimate*), degli intervalli di variazione della stessa secondo prefissati livelli di probabilità. Ad oggi la *best practice* attuariale nel campo della riserva sinistri è ancora caratterizzata, sia in Italia che all'estero, dall'impiego di metodologie deterministiche che forniscono per costruzione solamente un dato puntuale della previsione, escludendo qualsiasi apprezzamento sulla probabilità del suo avverarsi.

L'impiego di metodologie stocastiche si consoliderà in prospettiva, a seguito del progetto *Solvency II*, ove il CEIOPS, su richiesta della Commissione, ha posto tra l'altro quale traguardo ai paesi aderenti il raggiungimento di un *benchmark* armonizzato in chiave probabilistica (*best estimate* più *risk margin*) quale requisito regolamentare per la riserva sinistri. Infatti in tale contesto una precisa definizione di *best estimate* e *risk margin* può essere fornita solamente mediante l'applicazione di un modello di valutazione stocastico alle serie storiche dei sinistri.

Durante i lavori si è pertanto reso necessario esplorare varie opzioni di calcolo, sviluppando diverse soluzioni, sia esatte che approssimate, per il calcolo del *reserve risk capital* e dei *risk margin*. Si è quindi operato nell'ambito di un *framework* di riferimento complesso, originato da una impostazione teorica del problema coerente con il principio della *fair valuation*.

Considerata la funzione strategica che tali approfondimenti di carattere scientifico rivestono, sia per l'adesione dell'ISVAP ad una specifica opzione tra quelle previste da *Solvency II*, sia per le potenziali implicazioni operative a livello di vigilanza attuariale, il gruppo di studio dell'ISVAP – coordinato da Lino Matarazzo e formato da Stefano Cavastracci e Stefano Pasqualini – si è avvalso della supervisione scientifica di Massimo De Felice, dell'Università di Roma "La Sapienza", e Franco Moriconi, dell'Università di Perugia.

1.1 L'impostazione dello studio

Nel contesto metodologico descritto, lo studio si è proposto i seguenti obiettivi:

- verificare l'applicabilità di alcune metodologie stocastiche alla realtà italiana, evidenziandone vantaggi ed eventuali criticità a livello gestionale, sia per le imprese che per la vigilanza;
- utilizzare i momenti e le distribuzioni di probabilità forniti dagli *stochastic reserving models* per definire, anche formalmente, le grandezze contenute nelle diverse opzioni previste dal progetto *Solvency II* per la misura della riserva sinistri (*best estimate* più *risk margin*) e del *reserve risk capital*;
- misurare quantitativamente il livello di prudenza implicito delle riserve sinistri del comparto auto del mercato italiano 2004 secondo diversi potenziali *benchmark* (quantili, costo del capitale), apprezzando nel contempo l'effetto del *discounting*, attualmente vietato in Italia ma probabilmente ormai ineludibile in relazione alla evoluzione del quadro regolamentare internazionale (*Solvency* e IAS).

Nello studio sono state impiegate due versioni stocastiche della diffusa tecnica deterministica *chain-ladder* :

- il metodo di Mack (o *Distribution Free Chain-Ladder model*, DFCL);
- il metodo ODP (*OverDispersed Poisson model*, ODP) con tecnica di *bootstrap*.

La verifica di diversi *benchmark* di riserva sinistri e la misurazione del livello implicito di prudenza del comparto auto italiano per l'esercizio 2004 è stata effettuata prendendo come riferimento i rami *Responsabilità civile auto* (RCA) e *Corpi di veicoli terrestri* (CVT), le cui riserve costituiscono il 59% di quelle complessive danni. In dettaglio le analisi hanno riguardato:

ramo RCA:

- le riserve sinistri individuali iscritte nel bilancio 2004 da un campione di 40 imprese;
- le riserve sinistri del 2004 del ramo, considerate aggregando i dati storici sui pagamenti delle imprese in quattro fasce, definite sulla base dell'ammontare di riserva individuale iscritta in bilancio;

ramo CVT:

- le riserve sinistri del 2004 del ramo, aggregando i dati sui pagamenti secondo lo stesso criterio del ramo RCA.

1.2 Le scelte metodologiche

Le due metodologie sono state applicate ai pagamenti per sinistri organizzati secondo il classico schema triangolare (*run-off*), relativi alle serie storiche per gli anni 1995-2004 (ramo RCA) e 1998-2004 (ramo CVT). Ipotesi di lavoro sono state formulate sia in relazione alla durata massima di ogni

generazione sinistri (selezione del cosiddetto *tail factor*), sia alle modalità di proiezione al futuro dell'inflazione di ramo (*claims inflation*).

Con riferimento al processo inflattivo:

- in una prima fase le metodologie stocastiche sono state applicate ai dati dei pagamenti storici, proiettando così al futuro l'inflazione implicita di ramo registrata in passato;
- in una seconda fase – limitatamente al ramo RCA – è stato effettuato anche un trattamento separato dell'inflazione; la questione è rilevante dato che, come considerato dal CEIOPS nel *Call for Advice n.2*, l'eventuale applicazione del *discounting* obbliga l'assicuratore ad esplicitare l'inflazione considerata per la stima del costo ultimo¹.

Dato che si è interessati alla variabilità delle stime di riserva, si è reso necessario rappresentare l'andamento dell'inflazione di ramo attraverso un modello anch'esso stocastico; per il fattore inflattivo è stato utilizzato un processo stocastico di tipo lognormale (moto browniano geometrico), caratterizzato da un *trend* di crescita e da una volatilità assegnati).

Per quanto attiene infine al progetto *Solvency II*, sono stati presi in esame i due metodi alternativi per il calcolo del *risk margin*:

- *quantile approach*, in base al quale il *risk margin* è definito come distanza tra la *best estimate* e il valore di OLL scelto ad un prefissato livello di probabilità, tipicamente uguale al 75-esimo o 90-esimo quantile;
- *cost-of-capital approach*, per il quale il *risk margin* è dato dal costo del patrimonio di vigilanza (*reserve risk capital*) richiesto dalla normativa per coprire il rischio di insolvenza fino all'estinzione completa della riserva sinistri.

Per una precisa individuazione delle grandezze suesposte, lo studio ha comportato, tra l'altro, la risoluzione di alcune questioni teoriche e metodologiche aventi significative implicazioni operative nei calcoli del *risk margin* e del *reserve risk capital*, quali, ad esempio:

- la scelta di un approccio stocasticamente corretto, ai fini del calcolo del *reserve risk capital*, per ricavare all'epoca di valutazione della riserva, la distribuzione sia dei pagamenti per sinistri (*liability*), sia dell'aspettativa di riserva (residua) nell'esercizio successivo (entrambe variabili casuali costituenti l'impegno di "primo anno" dell'assicuratore);
- la determinazione della quota di *risk margin* da sottrarre al *worst case* nel calcolo del *risk capital* di primo anno (per evitare il cosiddetto doppio conteggio di capitale);
- la soluzione, nel caso del *risk margin* determinato come *cost of capital*, del problema della cosiddetta circolarità della definizione;
- il controllo, nel caso del *discounting*, della sub-additività dei *risk margin* dovuta all'effetto di diver-

¹Come precisato dal "Rapporto Manghetti" [7], il costo ultimo deve sempre costituire la base di partenza per l'applicazione di qualsiasi tecnica di sconto delle riserve sinistri.

sificazione (la somma dei *risk margin* delle singole generazioni sinistri è superiore al *risk margin* della somma delle stesse, dopo la diversificazione).

Nel quadro teorico delineato è stato possibile individuare tra l'altro diversi approcci alternativi al calcolo del risk capital. Le varie opzioni di calcolo sono state applicate, nell'ambito dei due modelli stocastici considerati, alle imprese del campione selezionato. I livelli di risk capital ottenuti sono stati anche confrontati con i *Solvency Capital Requirement* (SCR) per il *reserve risk* calcolati secondo le prescrizioni del CEIOPS e definiti tecnicamente nel secondo studio di impatto quantitativo (QIS2).

1.3 Sintesi dei risultati

1.3.1 Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi storici

I modelli stocastici ODP con bootstrapping e DFCL di Mack, entrambe versioni stocastiche del metodo tradizionale chain-ladder, sono risultati applicabili alla maggior parte delle imprese del mercato italiano RCA. Mediante le loro proprietà statistiche è stata superata la logica attuariale tradizionale della sola stima puntuale della riserva sinistri. L'impiego di tali metodi per la stima/controllo della riserva sinistri RCA costituisce un significativo progresso rispetto alla best practice attuariale corrente, ove prevale ancora un livello di soggettività molto marcato nella applicazione di metodi deterministici, spesso "adattati" alla realtà gestionale dell'impresa.

Sono state comunque osservate, a livello metodologico, delle differenze tra i due metodi stocastici, quali:

- l'ODP con *bootstrapping* si dimostra più prudentiale del Mack, nel senso che fornisce, a parità di *best estimate*, intervalli di confidenza più ampi e, quindi, riserve sinistri (con il *risk margin* definito come campo di variazione) più elevate. Pertanto si è osservato che i *benchmark* di riserva proposti da *Solvency II* (*best estimate* più *risk margin*) risultano avere, per le imprese, un costo regolamentare maggiore se determinati con la metodologia ODP (con *bootstrapping*);
- l'ODP richiede un approccio più oneroso dal punto di vista computazionale, ma risulta meglio specificato dal punto di vista statistico; d'altra parte il DFCL consente di effettuare calcoli con formula chiusa, anche se, allo stato attuale di conoscenze, non sono disponibili espressioni per tutte le quantità di interesse;
- l'ODP, fornendo attraverso il *bootstrapping* la distribuzione della aspettativa di riserva, rappresenta il metodo più completo per un corretto approccio al calcolo del requisito di capitale.

È bene tuttavia precisare che lo studio non rappresenta una specifica raccomandazione per un impiego esclusivo delle due metodologie stocastiche prese in esame. Al momento, tuttavia, esse risultano un riferimento, poiché producono *best estimate* identiche a quelle fornite dal *chain-ladder* deterministico.

Tuttavia, come si è potuto constatare anche nello studio, i metodi stocastici per la stima delle OLL hanno il pregio di :

- essere applicati in un *framework* coerente dal punto di vista scientifico;
- essere rigorosi nella procedura di calcolo che, una volta specificata, è ripetibile a fini di controllo da chiunque ne abbia interesse (revisori, vigilanza, *stakeholders*);
- fornire una risposta matematica rigorosa alle domande riguardanti le probabilità e i quantili, specialmente in vista delle nuove modalità di gestione del rischio e dell'approccio all'incertezza che queste richiedono;
- produrre, nell'ambito di questo corretto approccio all'incertezza, distribuzioni empiriche delle OLL separate per anno di accadimento e per *maturity*, e le distribuzioni empiriche delle riserve a costo ultimo "future", ad esempio "tra un anno", separate per anno di accadimento. In particolare, forniscono la distribuzione di probabilità sufficiente per il calcolo del *reserve risk capital*;
- associare automaticamente ai risultati aggregati (ad esempio, la somma delle riserve sinistri delle singole generazioni) i corretti effetti di diversificazione.

Deve essere altresì chiaro che la soggettività del giudizio dell'attuario non è comunque automaticamente eliminata dalla scelta di applicare metodologie stocastiche in luogo di quelle deterministiche. La soggettività può essere "limitata" e regolata definendo linee guida di comportamento nell'ambito della scelta di metodi e della stima di determinati parametri, rendendo gestibile e controllabile il processo da parte del supervisor. In effetti l'assenza di metodologie benchmark (nel nostro caso stocastiche) implica per la vigilanza attuariale danni un significativo utilizzo di tempo, nel ripercorrere ogni volta metodologie e ipotesi attuariali spesso variate ad hoc per ogni caso. L'ipotesi di prescrivere alle imprese (e quindi agli attuari) dei metodi stocastici, quali benchmark per la valutazione della riserva sinistri, appare percorribile anche secondo alcune proposte in discussione presso il CEIOPS.

Qualora si adottasse questa impostazione, l'impresa/revisore/attuario dovrebbe misurarsi prioritariamente con tali metodologie; ricadrebbe inoltre su costoro l'eventuale onere di dimostrare alla vigilanza l'inapplicabilità delle metodologie, concordando con essa metodi e ipotesi di calcolo alternativi.

Si tratta nella sostanza di una svolta nella gestione corretta del rischio di impresa, in linea con quanto richiesto dall'ISVAP stesso alle imprese con la recente circolare 577/D del 30 dicembre 2005 sul controllo interno.

Si osserva, infatti, che seppure lo studio sull'applicabilità delle metodologie stocastiche sia stato limitato al comparto auto, il principio di prescrivere metodi e ipotesi di riferimento rimane valido sia per altri rami danni significativamente a rischio di riserva, sia per le piccole imprese.

Infatti eventuali criticità nella applicazione dei metodi, derivanti dalla scarsità dei dati o dalle ipotesi riguardanti la distribuzione di probabilità da impiegare, dovranno anch'esse essere regolamentate dalla vigilanza in modo da promuovere la trasparenza dei modelli e limitare/controllare attraverso "protocolli metodologici" la soggettività comunque ineliminabile nelle valutazioni di bilancio.

1.3.2 Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi correnti

La stima delle riserve effettuata riportando i valori degli importi dei pagamenti storici a valori correnti secondo l'inflazione del mercato RCA registrata dal 1996-2004 (stimata in media nel 9% annuo) e proiettata per i pagamenti attesi con una ipotesi più contenuta (in media il 7,5% annuo), ha evidenziato a livello di *best estimate* una riduzione in media del 3,8%. Trattando il caso limite di assenza di inflazione RCA futura, la *best estimate* si riduce del 20,6% rispetto a quella ottenuta applicando i modelli ai dati a costi storici. Si è inoltre potuto constatare che nel modello con inflazione stocastica la volatilità dell'inflazione futura, ipotizzata al livello "prudenziale" del 4%, ha l'effetto di aumentare sensibilmente la deviazione standard dei pagamenti futuri e quindi di aumentare i requisiti di riserva.

Dai risultati consegue che la selezione del tasso futuro dell'inflazione di ramo influisce sensibilmente sulle stime finali e pertanto costituisce un aspetto delicato. Nei modelli stocastici per l'inflazione, la volatilità del processo incrementa sensibilmente quella dei pagamenti futuri ottenuta con la tecnica di *loss reserving*, aumentando parallelamente i requisiti di riserva e quindi i costi regolamentari per le imprese.

A livello di vigilanza attuariale, l'ipotesi di ripetibilità futura dell'inflazione storica (o la scelta di un tasso di inflazione verosimile) può essere di fatto oggetto di discussione, al pari di altre variabili di calcolo, con l'impresa/attuario/revisore in fase di controllo della riserva di ogni singola impresa. Al pari delle metodologie, sarebbe pertanto auspicabile che, con le nuove regole, anche determinate ipotesi di calcolo standard siano monitorate dalla Vigilanza, che le potrebbe indicare periodicamente al mercato (ad es. al pari di quanto avviene per il T.M.O. nei rami vita).

1.3.3 Il progetto Solvency II: il framework per la definizione e il calcolo dei requisiti di riserva e del *reserve risk capital*

La definizione di uno schema di riferimento basato sul *fair value* per la quantificazione della riserva sinistri e di una adeguata misura di *reserve risk capital* incontra una serie di difficoltà di ordine concettuale e statistico. È noto infatti che in genere non esistono mercati spessi ed efficienti né per le passività danni, e neanche per contratti a queste assimilabili sui cui prezzi sia possibile calibrare un modello *market consistent* che incorpori il premio per il rischio. Pertanto, in linea con quanto richiesto dal principio della *fair valuation*, in questi casi è necessario costruire modelli di mercato che trattino in maniera coerente aspettative e premi per il rischio mediante distribuzioni di probabilità naturali.

Queste ultime sono prodotte dalle metodologie stocastiche di *loss reserving* (nel nostro caso, ODP e Mack con ipotesi di lognormalità).

Il nuovo requisito di riserva (*required reserve*)

In particolare nel progetto *Solvency II*, in assenza di un mercato di riferimento il nuovo requisito di riserva sinistri è stato definito quale somma della *best estimate* degli impegni in-essere alla fine dell'esercizio e di un esplicito *risk margin* quale premio per il rischio. Tuttavia, mentre, l'aspettativa (o valore medio) della distribuzione di probabilità naturale dei futuri *cash-flow* intesa come *best estimate*, appare una definizione in linea con i principi attuariali, per il calcolo del *risk margin* sono stati considerati due metodi alternativi (tecnica del quantile e del costo del capitale); Per la definizione di un modello, che esplicitasse sotto il profilo formale il *risk margin* (e quindi il nuovo requisito di riserva) secondo i due diversi approcci, è stato seguito in sintesi il seguente schema logico:

- si è ipotizzata l'esistenza di un prezzo di mercato per un flusso futuro di passività (*liability*) danni il cui *fair value* è stato definito, in base al principio di arbitraggio, come il valore attuale delle aspettative su una distribuzione di probabilità *risk neutral*. Queste aspettative considerano implicitamente – per definizione – il *risk loading* di mercato aggiunto alle aspettative “naturali”.
- è stato quindi definito il valore attuale atteso delle passività utilizzando le probabilità naturali;
- utilizzando il *fair value* e il valore attuale atteso delle passività è stato esplicitato formalmente il *market value margin* quale differenza tra i due valori.

In particolare:

il risk margin al tempo iniziale risulta pari al valore attuale dei futuri caricamenti per il rischio corrispondenti ad ognuno degli importi residui da corrispondere alle singole scadenze annuali, fino all'estinzione completa della riserva sinistri.

Il *risk capital* di riserva (*reserve risk capital*)

Conformemente ai principi della *solvency*, il requisito di *risk capital* è soddisfatto considerando un intervallo temporale di riferimento, tipicamente un anno: al tempo zero si calcola il *worst case* (o *Risk-Adjusted Value*, RAV) rispetto agli obblighi dell'assicuratore definiti alla data di chiusura del prossimo bilancio; quindi il processo si itera di anno in anno per tutta la durata delle *liability*.

In particolare l'impegno aleatorio “di primo anno” dell'assicuratore (definito nello studio “valore *cum praestatione*”), è costituito dalla somma di due variabili casuali: la passività relativa ai pagamenti dei sinistri dell'anno in corso e la nuova riserva regolamentare (residua) alla fine dell'esercizio successivo.

Nell'ipotesi di *fair valuation* il calcolo del RAV degli impegni di “primo anno” (*cum praestatione*) richiederebbe, in via di principio, la conoscenza della distribuzione *risk neutral* delle *liability* residue;

quindi il calcolo del *reserve risk capital* richiede un “metodo misto” che considera sia le probabilità naturali che quelle *risk neutral*.

In assenza di un modello robusto di *fair valuation*, è difficile ottenere il calcolo del *reserve risk capital* coerente con la citata impostazione teorica ed è necessario ricorrere a opportune approssimazioni. D'altra parte in molte applicazioni pratiche questa complessità intrinseca del problema del *risk capital* non sembra essere stata pienamente riconosciuta e si riscontrano frequentemente soluzioni numeriche basate su approcci anche fortemente semplificati.

Anche allo scopo di fare ordine nella molteplicità di attacchi pratici al problema del *risk capital* riscontrabili in letteratura, nello studio è stata considerata una varietà di approcci/approssimazioni, caratterizzati da diversi livelli di precisione. In particolare, tenuto conto delle possibilità di calcolo dei due metodi attuariali stocastici utilizzati, sono state formulate due classi di approssimazioni che si basano:

- sulla variabilità dell'aspettativa di fine anno (approssimazione “Year-End-Expectation”, YEE), nella quale la variabile riserva a fine anno (intesa come fair value cum praestatione) è sostituita dalla variabile data dal valore scontato, a fine anno cum praestatione, delle liability residue;
- sulla variabilità delle liability future (approssimazione “Liability-at-Maturity”, LM), nella quale si considera direttamente la variabilità di tutte le liability future, considerate alle rispettive scadenze.

Un importante risultato ottenuto, nel passaggio dalla distribuzione *risk neutral* a quella naturale, è che per ottenere la misura del *reserve risk capital*, pari alla differenza tra il RAV e la best estimate, bisogna tener conto di un fattore correttivo, pari al *risk loading* attualizzato relativo ai pagamenti del primo anno, evitando così la possibilità di doppi conteggi di capitale.

Pertanto, per determinare il RAV con le diverse approssimazioni, e quindi il reserve risk capital, è sufficiente specificare la variabile casuale rilevante per rappresentare le OLL e definire almeno il risk loading di primo anno.

1.3.4 Le definizioni alternative di *risk margin*

Nello studio sono state considerate le principali classi di *risk margin*, quello definito come percentile della distribuzione delle OLL, e quello come costo del mantenimento del *risk capital* fino all'estinzione delle passività. La comparazione tra le due definizioni non era tra gli obiettivi dello studio, anche perché entrambi gli approcci presentano vantaggi e svantaggi e dipendono da fattori il cui trattamento deve essere ancora precisato all'interno dello stesso progetto *Solvency II*. Nel nostro ambito si sono voluti esclusivamente sottolineare alcuni significativi risultati di carattere metodologico ottenuti nel caso che il costo del capitale venga impiegato come approssimazione del *risk margin* della riserva:

▪ con l'approccio del costo del capitale i problemi del requisito di riserva e di capitale si unificano in un singolo (e coerente) problema in quanto, specificati il RAV e lo spread (il sovrarendimento richiesto dagli investitori come premio al rischio), il risk capital e il market value margin (e quindi la riserva richiesta) possono essere determinati simultaneamente superando il cosiddetto problema della circolarità;

▪ se le definizioni di risk margin e di risk capital sono tra loro coerenti, per la quantificazione di entrambi, una volta calcolato il RAV della variabile casuale rilevante per le OLL, è sufficiente (sotto le approssimazioni YEE o LM) la specificazione dei pagamenti futuri attesi (le liability fornite dal metodo stocastico) e la struttura dei tassi risk-free di mercato. Viene meno quindi la necessità di fissare il risk loading per le liability di primo anno. Lo spread e il RAV possono essere specificati dalla Vigilanza rendendo gestibile operativamente il processo di calcolo.

1.3.5 Calcolo del *risk capital* e del *risk margin* secondo i diversi approcci

Il calcolo del *risk capital* e del *risk margin* effettuato secondo i due approcci (YEE e LM) è stato effettuato considerando tutte le ipotesi alternative (per agevolare il confronto i vari punti di vista sono stati anche schematizzati e rappresentati in forma tabellare nel paragrafo 4.4.5). Dal raffronto tra i risultati è emerso, in generale, che data una delle approssimazioni considerate, sia nel caso dei *risk margin* ricavati con la tecnica del quantile (al 75% e al 90%), che in quello come costo del capitale (con RAV fissato al 99,5% e *spread* pari al 6%), le misure di rischiosità fornite dall'ODP con l'approccio YEE sono tipicamente più elevate di quelle fornite dall'ODP con l'approccio LM; queste, a loro volta, sono più elevate di quelle analoghe fornite dal modello di Mack.

La variabilità di questi risultati, oltre ad evidenziare la necessità di una definizione delle grandezze di interesse, nonché di precisare le opportune metodologie di calcolo dei requisiti di rischio, possono essere di qualche rilievo nella messa a punto di un adeguato sistema di regolazione del mercato basato sull'uso di modelli interni.

Al riguardo il raffronto tra i livelli di *risk capital* prodotti dall'applicazione dei modelli stocastici dello studio al ramo RCA – secondo i diversi approcci – ed i *Solvency Capital Requirement* (SCR) per il *reserve risk* calcolati secondo le prescrizioni del CEIOPS – nel secondo studio di impatto quantitativo (QIS2)–, ha evidenziato che i valori di SCR risultano in linea generale uguali per tutte le imprese con livello di riserva sinistri superiore ai 100 milioni di Euro. Per quasi tutte queste imprese, un modello interno, basato su uno qualsiasi degli approcci considerati, dovrebbe consentire una sensibile riduzione del requisito di capitale rispetto a quanto prescritto dalle specifiche QIS2.

1.3.6 Alcuni risultati numerici sulla sufficienza delle riserve

Come risulta dalle considerazioni finora esposte, le indicazioni fornite dallo studio hanno riguardato sia questioni metodologiche che aspetti quantitativi. Oltre alle implicazioni conseguenti alle definizioni alternative di *risk margin* e di *risk capital* – in logica scontata e non scontata –, all'analisi comparativa delle "prestazioni" dei modelli stocastici di *loss reserving*, all'impatto delle ipotesi inflattive, i risultati hanno anche riguardato gli effetti quantitativi dei vari punti di vista sia sulla sufficienza delle riserve che sui requisiti di capitale delle imprese del comparto auto italiano.

Può essere utile concludere questa parte introduttiva anticipando, in forma sintetica, alcuni risultati numerici sull'adeguatezza delle riserve. Una descrizione dei risultati numerici riguardanti i requisiti di capitale richiede la precisazione di numerosi dettagli sugli approcci e sui modelli utilizzati; per questo argomento si rinvia quindi al corpo del lavoro e in particolare alle sintesi dei paragrafi 5.7 e 5.8.

1.3.7 Benchmark non scontati

Analisi del mercato RCA per singola impresa

I risultati evidenziano che nel 2004 il livello implicito di prudenza delle riserve sinistri RCA del mercato (inteso come la somma delle riserve sinistri iscritte in bilancio dalle 40 imprese del campione) risulta in media lievemente più vicino al requisito di riserva che adotta quale risk margin il Cost-of-Capital (CoC) che a quello in base al 75-esimo percentile.

Infatti, se si adottasse uno di tali *benchmark*, le riserve di mercato risulterebbero, in media, inferiori a quella richiesta rispettivamente dell'1,1% (276 milioni di Euro) nel caso del CoC e dell'1,9% (453 milioni di Euro) utilizzando il 75-esimo percentile. Qualora il requisito di riserva risultasse fissato al 90-esimo percentile le riserve del mercato sarebbero sottostimate del 6,5% (1.562 milioni di Euro).

A livello di singole imprese, 25 sulle 40 imprese del campione non risulterebbero in regola con le riserve al 75-esimo percentile (24 utilizzando come *risk margin* il costo del capitale) e dovrebbero quindi procedere ad una rivalutazione dei propri accantonamenti del 14% (75-esimo percentile) e del 13% (CoC). Per contro, 15 imprese del campione possiedono riserve superiori al 75-esimo percentile (16 imprese se si utilizza come *risk margin* il costo del capitale) e dovrebbero quindi *ridurre* le proprie riserve sinistri di oltre il 17%.

Analisi aggregata del mercato RCA per fasce di imprese

L'analisi del mercato suddiviso in quattro fasce ha evidenziato che la prima fascia (9 imprese di grandi dimensioni) è risultata allineata al più prudente 90-esimo percentile, la seconda (16 imprese) lievemente al di sotto del 75-esimo, mentre significativamente insufficienti rispetto allo stesso *ben-*

chmark sono risultate la terza e la quarta fascia (rispettivamente del 14% e del 39%). L'analisi ha messo inoltre in evidenza una sensibile riduzione del coefficiente medio di variazione rispetto alle risultanze del campione (dal 10% circa al 2,9% nel caso ODP), fatto attribuibile in gran parte all'effetto di diversificazione prodotto dall'aggregazione dei triangoli dei dati *run-off* operata per l'elaborazione dei dati per fasce.

Analisi aggregata del mercato CVT per fasce di imprese

I risultati hanno evidenziato come nel 2004 il mercato CVT presenti un livello implicito di prudenza delle riserve a costo ultimo superiore dell'8% circa al 95-esimo percentile. Tutte le fasce possiedono riserve sinistri superiori al 75-esimo percentile. In particolare la seconda fascia risulta superiore dell'8% al 95-esimo percentile, la prima sostanzialmente pari al 90-esimo, la terza fascia lievemente inferiore al 90-esimo. La quarta fascia, infine, risulta superiore del 14% al requisito del 95-esimo, ma presenta un elevato grado di variabilità nei risultati.

1.3.8 Benchmark scontati

Il passaggio al discounting ha comportato, una riduzione, variabile tra gli 8-8,5 punti percentuali, per i tre benchmark di riserva esaminati, e quindi un aumento dello stesso ordine di grandezza delle eccedenze presenti nelle riserve (a costo ultimo) iscritte in bilancio dall'intero ramo RCA nel 2004.

Il livello implicito di riservazione nel 2004 del mercato RCA passerebbe, in caso di adozione di *benchmark* scontati, dal 75-esimo al 90-esimo percentile. I risultati hanno per contro evidenziato che le riserve a costo ultimo di 18 imprese su 40 risultano inferiori anche ai *benchmark* scontati al 75-esimo percentile e con il costo del capitale come *risk margin*, e dovrebbero rivalutare i propri accantonamenti dell'11% circa. Tali imprese non sarebbero quindi nella condizione di poter attualizzare le riserve.

CAPITOLO 2. GLI OBIETTIVI DELLO STUDIO

Premessa

La sufficienza delle riserve tecniche costituisce la pietra angolare su cui poggia il sistema di solvibilità. In particolare nei rami danni la potenziale sottostima della riserva sinistri rappresenta una considerevole fonte di rischio per le imprese di assicurazione.

La riserva sinistri, come importo rappresentativo degli impegni futuri in-essere (*outstanding loss liabilities*, OLL) dell'assicuratore, è per sua natura una posta stimata, e le metodologie attuariali formano ormai da tempo, a vario titolo, parte integrante dello specifico processo di valutazione (e del *judgement* professionale attuariale), attesa la generale inadeguatezza della procedura di inventario (valutazione sinistro per sinistro), adottata dalle compagnie a rappresentare il costo ultimo dei sinistri specialmente per i rami a lenta liquidazione.

2.1 I metodi attuariali per la riserva sinistri

Uno degli argomenti più dibattuti nella letteratura e pratica attuariale internazionale dell'assicurazione danni negli ultimi due decenni, riguarda l'utilizzo, ai fini della costituzione o del controllo a posteriori della riserva sinistri, di metodologie statistiche (*loss reserving models*) di tipo stocastico o deterministico. Le prime, a fronte di una minore maneggevolezza operativa e di ipotesi più impegnative sui dati di base, offrono il vantaggio di fornire, in aggiunta alla stima (*best estimate*) della riserva, degli intervalli di variazione della stessa secondo prefissati livelli di probabilità.

Le metodologie deterministiche invece offrono una minore valenza informativa, ma hanno il vantaggio di una rapida e semplice attuazione sotto il profilo computazionale, di minori vincoli sui dati di base e soprattutto di immediata comprensibilità a livello di management dell'impresa. Per queste ragioni le metodologie deterministiche sono state, in genere, sempre preferite a quelle stocastiche dagli attuari, sia in Italia che all'estero. Ad esempio, da una indagine effettuata nel 2003 dalla Faculty of Actuaries¹ presso gli attuari inglesi sull'impiego dei metodi stocastici nell'attività professionale di *claims reserving*, emergeva che il 70% degli intervistati o non li aveva mai usati o lo aveva fatto solo occasionalmente, mentre soltanto il 6% se ne avvaleva nella propria attività. Tra i principali ostacoli segnalati dagli intervistati figuravano la scarsità di risorse, la mancanza di dati e di software adeguati, la difficoltà di far comprendere i risultati al *management* non specialistico e l'assenza di esperienza specifica. Tuttavia l'80% degli intervistati avrebbe desiderato utilizzare le metodologie stocastiche più frequentemente o almeno in talune occasioni.

¹Faculty of Actuaries 2003 [11].

Un decisivo impulso all'impiego delle metodologie stocastiche in generale si è avuto negli ultimi anni grazie all'ingresso nella finanza d'impresa delle tecniche della finanza dei mercati (e della connessa modellizzazione stocastica); si è assistito di conseguenza ad un ricorso sempre più frequente a tecniche di ALM (*Asset Liability Management*) da parte delle imprese per il monitoraggio e la misurazione dei diversi rischi (di mercato, di credito e operativo) ai fini della quantificazione dei capitali necessari alla loro copertura (*risk capital*).

In campo assicurativo, con specifico riferimento al rischio di insufficienza delle riserve sinistri (*run-off risk*), l'impiego di metodologie stocastiche potrebbe definitivamente consolidarsi in prospettiva guardando ai potenziali sviluppi del progetto Solvency II, ove il CEIOPS, su richiesta della Commissione, ha posto, tra l'altro, quale traguardo ai paesi aderenti il raggiungimento di un *benchmark* armonizzato in chiave probabilistica (*best estimate* più *risk margin*) quale requisito regolamentare per la riserva sinistri.

In tale contesto, lo studio si è proposto i seguenti obiettivi:

- verificare l'applicabilità di alcune metodologie stocastiche alla realtà italiana, evidenziandone vantaggi ed eventuali criticità a livello gestionale, sia per le imprese che per la vigilanza per quanto riguarda il comparto auto;
- utilizzare i momenti e le distribuzioni di probabilità forniti dagli *stochastic reserving models* per definire anche formalmente le grandezze contenute nelle diverse opzioni previste dal progetto *Solvency II* per la misura della riserva sinistri e del *reserve risk capital*;
- misurare quantitativamente il livello di prudenza implicito delle riserve sinistri del mercato italiano 2004 secondo diversi potenziali *benchmark* (quantili, costo del capitale), apprezzando nel contempo l'effetto del *discounting*, attualmente vietato in Italia ma probabilmente ormai ineludibile in relazione alla evoluzione del quadro regolamentare internazionale (*Solvency II* e *IAS*).

Nel corso dello studio sono stati quindi effettuati calcoli del *risk margin* e del *reserve risk capital* secondo le diverse impostazioni.

2.2 Modelli e dati utilizzati

La verifica di diversi *benchmark* di riserva sinistri e la misurazione del livello implicito di prudenza del mercato italiano per l'esercizio 2004 è stata effettuata prendendo come riferimento i rami "Responsabilità civile autoveicoli" (RCA) e "Corpi di veicoli terrestri" (CVT) le cui riserve costituiscono il 59% di quelle complessive danni. In dettaglio le analisi hanno riguardato:

ramo RCA

- le riserve sinistri individuali iscritte nel bilancio 2004 da un campione di 40 imprese;

- le riserve sinistri del 2004 del ramo suddiviso in quattro fasce, secondo diverse classi di livello dell'ammontare di riserva iscritto in bilancio;

ramo CVT

- le riserve sinistri del 2004 del ramo suddiviso in quattro fasce includenti le medesime imprese del ramo RCA.

Ai dati sono state quindi applicate due metodologie stocastiche, caratterizzate da ipotesi diverse sulla distribuzione di probabilità dei pagamenti. Ambedue i metodi costituiscono delle versioni stocastiche del tradizionale metodo *chain-ladder*, nel senso che il valor medio delle distribuzioni (*best estimate* non scontata) coincide con le stime prodotte da questo metodo deterministico. Per quanto attiene all'attuale diffusione in Italia della tecnica deterministica *chain-ladder*, vi è da dire che nel 2004 questa (od una appartenente alla stessa famiglia dei *link-ratios methods*) risulta impiegata dagli attuari (revisori e incaricati RCA) nel 31% dei casi, contro il 34% del tradizionale metodo a costo medio (detto in genere "Fisher-Lange"), mentre il 20% è suddiviso tra i metodi di Taylor e di Bornhuetter-Fergusson. Il restante 15% è infine costituito da una eterogeneità di approcci.

Le due metodologie stocastiche utilizzate nello studio sono:

- Il metodo di Mack "*distribution-free*";
- il metodo ODP (*Over-Dispersed Poisson model*), applicato con tecnica *bootstrap*.

Per l'RCA i due modelli stocastici sono stati applicati sia ai pagamenti a costi storici che a quelli riportati a valori correnti sulla base dell'inflazione storica di ramo. A questo fine è stato effettuato un trattamento separato dell'inflazione RCA, descritta attraverso un modello anch'esso stocastico; per il fattore inflattivo è stato utilizzato un processo di tipo lognormale (moto browniano geometrico) caratterizzato da un *trend* di crescita e da una volatilità assegnati.

Per i principali dettagli sulle metodologie e per le ipotesi di lavoro si rinvia, rispettivamente, ai capitoli 3 e 5. Al quadro teorico, sviluppato anche sotto il profilo formale probabilistico, è dedicato l'intero capitolo 4, nel quale si è cercato di limitare il ricorso alle formule matematiche, riportandole solo quando necessarie ad identificare i concetti e le definizioni delle diverse grandezze oggetto di elaborazione.

CAPITOLO 3. I MODELLI STOCASTICI PER LA RISERVA SINISTRI NELLO STUDIO

3.1 I modelli per la misurazione e controllo della riserva sinistri: deterministici o stocastici?

Per gli attuari, il processo di stima della riserva sinistri è tradizionalmente consistito nell'applicare un certo numero di metodi ai vari set di dati, per sviluppare stime multiple di riserve per sinistri. Ogni metodo conduce a stime differenti del livello di riserva. L'attuario, tipicamente, procede poi a selezionare la stima "migliore" (*best estimate*) nell'ambito dei vari risultati, in base ad una valutazione dei pregi di ciascun metodo, conoscenza del business, ecc.

Questi metodi sono generalmente denominati deterministici perché non forniscono informazioni riguardo agli altri possibili risultati nell'intorno della stima. Anche quando vengono indicati dei *range* di valori possibili, la *best practice* è quella di fornire dei risultati forfetariamente, come, ad esempio, intervalli di variazione ricavati dalle indicazioni fornite dai diversi metodi applicati, o basate su una analisi di sensitività su alcuni fattori. I metodi deterministici non forniscono comunque informazioni sulla misura della probabilità che il valore stimato sia compreso nell'intervallo di variazione.

Si intuisce quindi come tale prassi operativa costituisca un ostacolo al raggiungimento dell'auspicata armonizzazione (tra attuari, rami assicurativi, imprese e paesi diversi). Inoltre, la vigilanza attuariale è frequentemente costretta ad un dispendio di risorse per verificare, caso per caso, il livello di prudenza contenuto nelle riserve sinistri accantonate in bilancio. A ciò si aggiunge il fatto che i metodi statistici non sono sempre applicabili a tutte le tipologie di rami, di imprese od ancora in presenza di dati fortemente irregolari o statisticamente insufficienti. In questi casi la Vigilanza attuariale deve venire a conoscenza delle procedure alternative impiegate per la valutazione della riserva, chiedendo opportuni chiarimenti agli attuari e alle imprese stesse.

Di questi aspetti ha tenuto conto anche il CEIOPS¹, che riguardo ai metodi statistici per la misurazione dei nuovi *benchmark* ed agli annessi profili di vigilanza ha osservato:

“Considerato che un singolo metodo di calcolo non può essere appropriato a tutte le circostanze, il processo di revisione della vigilanza sulle riserve tecniche dovrà prendere in considerazione, per quanto possibile, la specificità di ogni impresa. Per assicurare che lo standard qualitativo è soddisfatto il supervisore dovrà, quando opportuno:

- controllare la qualità dei dati. Questa fase dovrà essere chiave nel processo di supervisione; la cattiva qualità dei dati può incrementare significativamente l'errore di stima dei metodi statistici;*
- controllare l'applicabilità e la rilevanza dei metodi statistici;*
- esaminare altre giustificazioni attuariali o tecniche (stima di inventario, ecc.);*

¹CEIOPS 2005 [5].

– giudicare se il livello di prudenza ritenuto dall'impresa sia in linea con lo standard qualitativo.”

Il CEIOPS raccomanda inoltre: “il principio di uno standard quantitativo generale dovrebbe essere completato da un set di requisiti minimi sull'impiego di metodi statistici, inclusa la richiesta (ove praticabile) di applicare almeno due differenti approcci statistici nella riservazione”.

Si individua quindi l'intento da parte della Commissione di regolare la soggettività (comunque ineliminabile) del processo di riservazione, limitandola all'interno di specifici protocolli metodologici, rendendo cioè trasparenti metodi, algoritmi di calcolo e ipotesi di valutazione, a vantaggio degli *stakeholders*.

Un passo in avanti in tale direzione è senza dubbio costituito dal nuovo sistema di calcolo delle riserve tecniche proposto dal CEIOPS che, in un'ottica di armonizzazione europea, dovrebbe basarsi sulla somma di due distinte componenti:

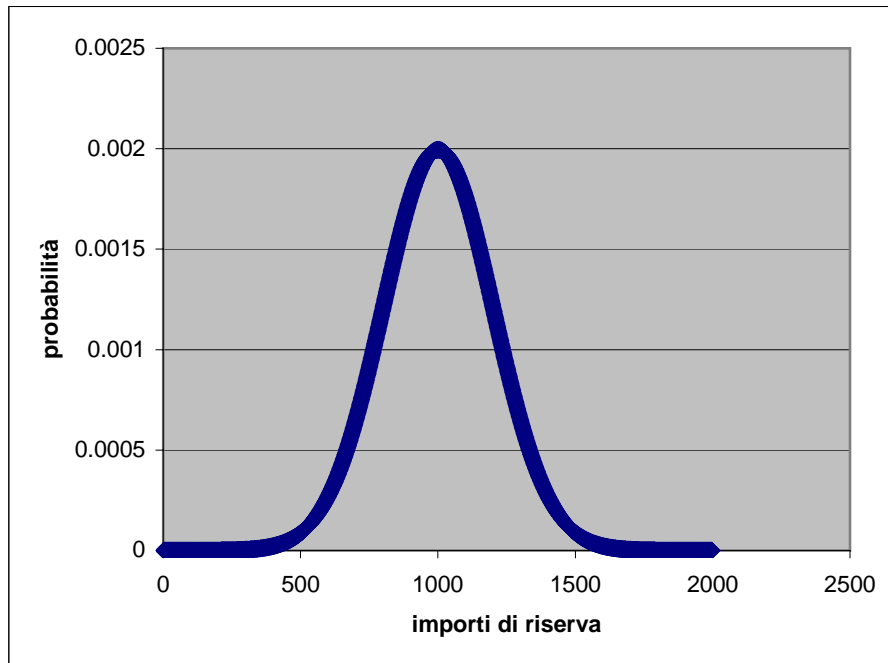
- la prima, *best estimate*, quale valore medio atteso dei *cash-flow* relativi agli impegni futuri nei confronti degli assicurati;
- la seconda, *risk margin*, quale margine addizionale volto proprio ad esplicitare quantitativamente il livello di incertezza dei *cash-flow* stessi, derivante da fattori di rischio esogeni.

Per la riserva sinistri i *cash-flow* da considerare sono rappresentati dalle prestazioni ancora in essere generate dalle polizze già sottoscritte in passato (le *Outstanding Loss Liabilities*, OLL), mentre una precisa definizione della *best estimate* e del *risk margin* può essere fornita solamente mediante l'applicazione alle serie storiche dei sinistri di modelli stocastici. Mediante questi ultimi è infatti sempre possibile pervenire ad una stima dei momenti di primo ordine (media) e di secondo ordine (varianza) della distribuzione di probabilità delle OLL, o – come si usa dire con terminologia semplificata – della distribuzione della riserva. Naturalmente potrà essere ricavata anche la distribuzione di probabilità completa, qualora la sua forma sia stata specificata nelle ipotesi di base del modello; per i modelli cosiddetti “distribution-free”, invece, la distribuzione completa dovrà essere ottenuta dai momenti di primo e secondo ordine adottando un'opportuna ipotesi aggiuntiva. Dal punto di vista del calcolo effettivo poi la distribuzione potrà essere ricavata analiticamente, oppure tramite tecniche di simulazione. In ogni caso i possibili valori di riserva si presentano con andamenti qualitativi simili a quello illustrato nella figura 3.1.

I metodi stocastici, pur considerati i punti di forza (rigorosità dell'algoritmo) e di debolezza (ad es. selezione della appropriata distribuzione per un determinato ramo) hanno, rispetto alle valutazioni di variabilità ricavate dai metodi tradizionali, il vantaggio di essere basati su ipotesi statistiche esplicite e coerenti, e di ridurre al minimo gli aggiustamenti ad hoc e le valutazioni discrezionali.

Per favorire il raccordo con la *best practice* precedente molti dei metodi stocastici per le riserve sono stati costruiti estendendo le tradizionali tecniche deterministiche nell'ottica di una rap-

Figura 3.1. Distribuzione della riserva sinistri



presentazione probabilistica dei risultati. Lo sviluppo e l'uso di metodi di questo tipo è in forte crescita.

In particolare, sin dagli anni '80 è stato avviato lo studio di estensioni stocastiche della tecnica deterministica *chain-ladder* ed in particolare, si è svolto un approfondito dibattito scientifico su quale tra le metodologie introdotte possa essere correttamente considerata un'estensione dell'approccio tradizionale. In questo ambito due modelli stocastici riscuotono attualmente una particolare attenzione, sia nel dibattito scientifico che nelle applicazioni operative:

- il modello di Mack detto "*Distribution-Free Chain-Ladder*" (DFCL), proposto nel 1993 ([16]), che non prevede ipotesi specifiche sulla distribuzione dei pagamenti futuri, limitandosi a modellarne la media e la varianza;
- il modello di Poisson iperdisperso (*Over-Dispersed Poisson*, ODP), introdotto da Renshaw e Verrall nel 1998 ([19]); appartiene alla classe dei Modelli Lineari Generalizzati (GLM), e ipotizza per i pagamenti dei sinistri una distribuzione Poissoniana sovradispersa.

Altri modelli stocastici proposti producono valori medi vicini, ma non identici, alle stime *chain-ladder*. Un vantaggio importante del modello di Renshaw e Verrall è che la teoria associata ai GLM suggerisce come possono essere ottenute le stime dei parametri, appropriate definizioni dei residui e le relative misure della bontà di adattamento del modello ai dati effettivi, anche nel caso di osservazioni storiche incomplete. Se usato come GLM, il modello ODP fornisce, come il modello di Mack, solo i momenti di primo e secondo ordine (medie, varianze e covarianze) delle riserve. Tuttavia per

l'ODP è possibile ottenere la distribuzione completa di probabilità attraverso una tecnica di simulazione di tipo *bootstrap* applicata ai residui. È quindi possibile ricavare le statistiche di interesse (per esempio, i quantili, o percentili) senza ipotesi aggiuntive ad hoc sulla distribuzione sottostante.

Il modello di Mack è stato recentemente impiegato in Germania e Portogallo in uno studio sui rispettivi mercati nazionali RCA; essendo l'approccio *distribution-free*, i quantili sono stati calcolati facendo un'ipotesi aggiuntiva sulla forma della distribuzione di probabilità, che è stata scelta di tipo lognormale, con media e varianza uguali a quelle prodotte dall'applicazione del modello.

Nel presente studio è stato impiegato sia il modello di Mack che l'ODP, il primo adottando l'ipotesi aggiuntiva di lognormalità – come negli studi tedesco e portoghese –, il secondo utilizzando la metodologia del *bootstrap* simulato. In dettaglio, nel paragrafo 3.2 si accenna ad uno schema generale di rappresentazione di dati per l'applicazione dei metodi statistici ed alla tecnica *chain-ladder* tradizionale, mentre i modelli impiegati sono sinteticamente illustrati nel paragrafo 3.3.

3.2 Il *chain-ladder* tradizionale

Schema generale di rappresentazione dei dati

Nelle assicurazioni danni per valutare alla chiusura dell'anno di bilancio gli accantonamenti per sinistri ancora da liquidare, generati da un portafoglio di contratti, si fa riferimento, in generale, al triangolo dei risarcimenti effettuati nel passato aggiornato alla data corrente di valutazione.

In dettaglio, si assume che le osservazioni riferite ai pagamenti effettuati siano riferite ai sinistri avvenuti in un limitato periodo precedente (n) e pertanto, in questo schema, risultano disponibili gli importi pagati degli antecedenti n anni di avvenimento o *generazioni di sinistro*. Per ciascuna generazione, inoltre, si suddividono i dati per l'anno di sviluppo che misura l'anzianità di pagamento del sinistro².

Inoltre, sulle diagonali del triangolo è possibile leggere gli importi pagati per le suddette generazioni in ciascun anno di bilancio. Ai fini della valutazione si devono stimare, sulla base dei risarcimenti passati, gli elementi incogniti alla data corrente (pagamenti da effettuare nel futuro), collocati nel triangolo inferiore. La somma dei dati riferiti a tale triangolo inferiore equivale alla stima della riserva sinistri (non scontata).

Da un altro punto di vista, utile ai fini operativi, si definiscono i sinistri pagati cumulati come somma dei pagamenti incrementali alla fine di ciascun anno di sviluppo. I costi ultimi di generazione, che saranno oggetto delle procedure di stima, sono i pagati cumulati alla fine dell'ultimo anno di sviluppo. Le riserve sinistri di generazione saranno pertanto date dalla differenza tra tale costo ultimo e i pagati

²Se la generazione più vecchia non risulta completamente estinta ed esiste ancora una coda di riserva per sinistri non pagati all' n -esimo anno, per prolungare i tempi di liquidazione si può far ricorso a numerose tecniche, che selezionano il cosiddetto "*tail-factor*".

cumulati alla data di bilancio situati sulla diagonale principale, mentre la riserva totale (non scontata) è pari alla somma delle riserve per generazione.

Secondo un'altra prospettiva, importante nel presente studio, sia per la determinazione del *risk capital* sia nella valutazione delle riserve attualizzate, la stima delle riserve sinistri viene vista come la determinazione dei pagamenti da effettuare per le generazioni esistenti oggi negli anni di bilancio futuri, che sono tanti quante sono le diagonali del triangolo inferiore.

Nel box 3.1 viene riportato un esempio di preparazione dei dati storici alla base della procedura di valutazione.

Box 3.1. La preparazione dei dati storici

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	290	98	27
	2002	335	310	86	
	2003	330	320		
	2004	298			

Si calcolano i sinistri pagati cumulati alla fine di ciascun anno di sviluppo (ad esempio 2001, anzianità 2 → 590 = 300 + 290 oppure 2002, anzianità 3 → 731 = 335 + 310 + 86):

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649		
	2004	298			

Il metodo chain-ladder

Il metodo *chain-ladder*, di cui non sono note le origini, è probabilmente la tecnica di valutazione più comunemente adottata, anche per l'esiguità dell'informazione richiesta. Esso fa riferimento agli importi cumulativamente pagati per risarcire sinistri della generazione i nei primi j anni di differimento. In particolare il metodo si basa sull'ipotesi che al variare dell'epoca j di differimento del pagamento, la progressione dei pagamenti cumulati si mantiene sostanzialmente la medesima per ogni generazione (ciò implica che i rapporti costruiti sui pagamenti tra due anni consecutivi ($j - 1$ e j) non dipendono dalla generazione i ma solo da j). La stima della riserva, fissati i rapporti per ciascun j , è basata pertanto sul prodotto di ciascuno degli elementi noti della generazione i , per i predetti fattori (si veda il riquadro 3.2).

Box 3.2. Il metodo *chain-ladder* – alcune formule

Gli importi pagati, denominati incrementali, relativi ai sinistri avvenuti nell'anno i e pagati in j si indicano con $C_{i,j}$ con $(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n-i+1)$.

I sinistri pagati cumulati sono definiti come somma dei pagamenti incrementali

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^j C_{i,k}$$

mentre i fattori di sviluppo sono dati dalla formula

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \quad \text{con } j = 1, \dots, n-1$$

Per $i = 2, \dots, n$ il metodo fornisce una stima cumulativa dei pagamenti futuri con le seguenti regole di proiezione:

$$S_{i,n} = S_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \lambda_j \quad \text{sono i costi ultimi di generazione ovvero i pagati cumulati alla fine dell'ultimo anno di}$$

sviluppo e si indicano $U_i \rightarrow U_i = S_{i,n}$ con $i = 2, \dots, n$

Le riserve sinistri di generazione sono una parte dei costi ultimi non ancora liquidati all'epoca di valutazione:

$$L_i = U_i - S_{i,n-i+1} \quad \text{con } i = 2, \dots, n$$

mentre la riserva totale è $L = \sum_{i=2}^n L_i$

Sono proposte in letteratura varie modifiche al metodo, per eliminare o attenuare l'influenza di eventuali effetti perturbativi dell'ipotesi di costanza della progressione dei pagamenti cumulati (inflazione, mutamenti nella politica liquidativa da parte dell'impresa, effetti dell'orientamento della magistratura in tema di risarcimento, ecc.). La manipolazione soggettiva, più o meno giustificata, dell'attuario di solito avviene con l'esclusione di alcuni dati storici del triangolo.

Una applicazione semplificata del metodo è riportata nei box 3.3 e 3.4.

Box 3.3. Una applicazione semplificata del *chain-ladder*

In primo luogo si riprendono i pagamenti cumulati del box precedente e si calcolano i fattori di sviluppo.

Primo fattore

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649		
	2004	298			

$$+(590+645+649)/(300+335+330)=1,95$$

Secondo fattore

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649		
	2004	298			

$$+(688+731)/(590+645)=1,15$$

Terzo fattore

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649		
	2004	298			

$$+714/688=1,04$$

Box 3.4. Una applicazione semplificata del *chain-ladder* (segue)

Utilizzando tali fattori viene determinato, come segue, il costo ultimo:

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649		
	2004	298	581		

$$+298 \cdot 1,95 = 581$$

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	
	2003	330	649	746	
	2004	298	581	668	

$$+649 \cdot 1,15 = 746$$

$$+581 \cdot 1,15 = 668$$

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	300	590	688	714
	2002	335	645	731	760
	2003	330	649	746	776
	2004	298	581	668	695

$$+731 \cdot 1,04 = 760$$

$$+746 \cdot 1,04 = 776$$

$$+668 \cdot 1,04 = 695$$

sottraendo da destra verso sinistra le celle contigue dei pagamenti cumulati stimati si ricostruiscono i pagamenti incrementali per il triangolo inferiore.

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001				
	2002				29
	2003			97	30
	2004		283	87	27

sommando per riga si determinano le riserve per ciascuna generazione di avvenimento:

Riserve	
2002	29
2003	127
2004	397
Totale	553

3.3 Le versioni stocastiche del *chain-ladder* utilizzate nello studio

Prima di descrivere le due metodologie stocastiche (modello DFCL di Mack e ODP) è bene premettere alcune considerazioni generali sull'errore di previsione (*prediction error*) sul cui calcolo (analitico o approssimato) sono stati effettuati numerosi approfondimenti, sia a carattere teorico che computazionale.

Un modello stocastico della riserva sinistri è un processo di previsione in cui le stime dei risarcimenti futuri sono ricavate sulla base dei dati osservati. In tale processo, la variabilità totale deve pertanto includere sia la variabilità insita nei dati stimati (*varianza del processo*), sia l'incertezza nella stima dei parametri del modello (*varianza della stima*). Nel riquadro 3.5 sono sintetizzate alcune considerazioni sull'errore di previsione.

3.3.1 Il modello di Mack

Il modello stocastico *chain-ladder* senza ipotesi distributive (DFCL) è stato introdotto da Thomas Mack³. Il modello ipotizza che i pagamenti di differenti generazioni siano indipendenti e che la media e la varianza dei pagamenti cumulati – condizionate all'osservazione dei pagamenti cumulati nell'anno di sviluppo immediatamente precedente – siano proporzionali agli stessi. I fattori di proporzionalità rappresentano i parametri caratteristici del modello, e vanno stimati sulla base dei dati osservati. Come dimostrato da Mack, gli stimatori dei fattori di sviluppo della media sono identici agli stimatori del *chain-ladder*; pertanto la *best estimate* della riserva sarà identica a quella prodotta dal metodo deterministico.

Per quanto riguarda la variabilità, Mack considera la varianza della previsione relativa a ciascuna singola generazione, fornendo espressioni esplicite sia per la componente di stima che per quella di processo (si veda il riquadro 3.6). L'aspetto usualmente di interesse nella pratica attuariale è tuttavia quello di ottenere l'errore di previsione della riserva totale. Anche se i pagamenti cumulati corrispondenti a differenti generazioni sono indipendenti per ipotesi, la varianza di previsione non può essere determinata sommando le varianze di previsione delle riserve delle singole generazioni, dato che la procedura di stima induce correlazione, sia tra righe (anni di generazione) che tra diagonalmente (anni di bilancio). In alcuni lavori successivi⁴ sono state sviluppate espressioni corrette della varianza di previsione totale e appropriate espressioni degli errori di previsione degli stimatori dei futuri anni di bilancio (importi sulle diagonalmente), che sono di interesse per il calcolo di valori scontati.

Come si è detto, essendo il modello di Mack a distribuzione libera, sono necessarie ipotesi aggiuntive se si richiedono requisiti di riserva basati su statistiche ulteriori, come i quantili. A questi

³Mack 1993 [16].

⁴Buchwalder, Bühlmann, Merz, Wüthrich 2005 [2]; Passalacqua, Vignati 2005 [18].

Box 3.5. Variabilità delle riserve nei modelli stocastici

Si fa riferimento alla variabile L che rappresenta la riserva totale. Utilizzando un appropriato modello stocastico per L sui dati del triangolo passato si ottiene un valore di previsione \hat{L} rappresentante una stima del valor medio $E(L)$.

Nei classici metodi statistici il “valore vero” di $E(L)$ è incognito e, posto che i dati risultano un campione casuale osservato, lo stimatore \hat{L} è anch'esso una variabile casuale. Pertanto la variabilità di \hat{L} include sia la variabilità della variabile casuale L sia la variabilità della stima. Ciò posto, si è interessati alla variabilità totale ovvero alla *varianza della previsione* (o *quadrato dell'errore di previsione*) di \hat{L} , che è definita come

$$P \text{ var}(\hat{L}) = E\left[(L - \hat{L})^2\right]$$

Tipicamente un'approssimazione della varianza della previsione è ottenuta assumendo la correttezza $E(L) = E(\hat{L})$ e l'indipendenza tra le osservazioni del passato e quelle future. Pertanto si ottiene la seguente scomposizione:

$$\begin{aligned} P \text{ var}(\hat{L}) &= E\left[(L - E(L) + E(L) - \hat{L})^2\right] \\ &= E\left[(L - E(L) - (\hat{L} - E(L)))^2\right] \\ &\approx E\left[(L - E(L))^2\right] + E\left[(\hat{L} - E(\hat{L}))^2\right] \\ &= \text{var}(L) + E \text{ var}(\hat{L}) \end{aligned}$$

dove il primo termine è solitamente riferito alla *varianza del processo* (o *quadrato dell'errore del processo-process variance*) e il secondo *varianza della stima* (o *quadrato dell'errore della stima – estimation variance*).

fini si è ipotizzata una distribuzione lognormale, con media e varianza uguali a quelle prodotte dagli stimatori sopra descritti.

Box 3.6. Il metodo di Mack (alcune formule)

Le ipotesi di base sono le seguenti:

$$E(S_{i,j}|S_{i,j-1}) = \lambda_{j-1} S_{i,j-1}$$

$$Var(S_{i,j}|S_{i,j-1}) = \omega_{j-1}^2 S_{i,j-1}$$

in cui λ_j e ω_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) sono parametri incogniti.

Mack ha ottenuto le rispettive stime

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}}$$

$$\hat{\omega}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\hat{\omega}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\omega}_{n-2}^4}{\hat{\omega}_{n-3}^2}, \hat{\omega}_{n-3}^2 \right) \quad \text{con } j = n-1 .$$

Per la varianza della previsione per ciascuna generazione Mack propone:

$$P \text{ var}(\hat{L}_i) \approx \hat{S}_{in}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\omega}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{S}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} S_{q,k}} \right)$$

3.3.2 Il Modello di Poisson con sovradisersione

Nel modello di Poisson con sovradisersione (ODP)⁵, si fa l'ipotesi di indipendenza tra i pagamenti incrementali. La media di ogni singolo pagamento si assume uguale al prodotto di un "parametro di riga" e di un "parametro di colonna"; la varianza è proporzionale alla media, attraverso un ulteriore parametro che determina la sovradisersione del modello.

È stato dimostrato che, sotto le ipotesi dell'ODP (con alcune appropriate condizioni aggiuntive), gli stimatori di massima verosimiglianza dei fattori di sviluppo individuali coincidono con gli stimatori del *chain-ladder* tradizionale. In questo senso, quindi, anche l'ODP può essere considerato una estensione stocastica del metodo classico: come per il modello di Mack, le proiezioni *chain-ladder* coincidono col valore atteso (*best estimate*) delle riserve fornite dal modello probabilistico.

Il modello ODP può essere alternativamente formulato come un modello lineare generalizzato (GLM), in cui la variabile risposta (il "pagato") è individuata da una *funzione di collegamento* di tipo logaritmico con le variabili esplicative (l'anno di avvenimento e l'anno di anzianità); alcuni dettagli tecnici sono illustrati nel box 3.7. In questa forma il modello può essere facilmente stimato mediante specifiche procedure numeriche (come, ad esempio, la procedura di stima GENMOD del SAS) che forniscono gli stimatori e le corrispondenti varianze dei parametri delle variabili esplicative.

Il Bootstrapping

Si è già osservato che l'approccio di stima GLM fornisce solo medie, varianze e covarianze dei pagamenti futuri per sinistri. Al fine di ottenere una distribuzione completa di questi importi il modello ODP viene applicato con una procedura simulativa. In questo approccio la variabilità della stima è ricavata con metodi di *bootstrapping*, che consistono nel generare dai dati effettivamente osservati un campione molto ampio di "pseudo-dati" ottenuti per simulazione. La generazione degli pseudo-dati adeguata all'ODP è ottenuta tramite un algoritmo, che è stato sistematizzato da vari lavori scientifici nell'ultimo decennio, e che è basato sul "rimescolamento", dei residui ricavati dai valori storici attraverso il metodo *chain-ladder* usato a ritroso.

La volatilità relativa alla varianza del processo è generata aggiungendo alla proiezione dei pagati incrementali – ricavata col da ogni "pseudo-triangolo" col *chain-ladder* – un errore casuale, campionato da una distribuzione ODP (approssimata).

È utile osservare che il processo simulativo fornisce una distribuzione empirica per ciascun pagamento incrementale del triangolo futuro. Pertanto, la distribuzione empirica previsiva delle riserve di generazione, di anno di bilancio e globale è immediatamente ottenuta aggregando i pagamenti simulati rispettivamente per riga, diagonale o sull'intero triangolo futuro. In particolare, la metodologia permette di ricavare la stima centrale (*best estimate*) come media aritmetica, il coefficiente di

⁵Renshaw, Verrall 1998 [19].

Box 3.7. Il modello ODP come modello lineare generalizzato

Ipotesi di base:

$$E(C_{i,j}) = m_{ij} \qquad \text{Var}(C_{i,j}) = \phi m_{ij} \text{ con } j = 1, \dots, n$$

Ai fini della stima del modello ODP può essere ridefinito ponendo:

$$\log(m_{ij}) = \mu_{ij} \qquad \mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j + c$$

le stime dei pagamenti futuri sono le seguenti:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{m}_{ij} = e^{\hat{\mu}_{ij}}$$

nella monografia di P. England e R. Verrall è stato dimostrato che la corrispondente varianza di previsione è approssimata da

$$P \text{ var}(\hat{C}_{ij}) = \phi \hat{C}_{ij} + \hat{m}_{ij}^2 \text{ var}(\hat{\mu}_{ij})$$

per determinare la varianza della previsione delle riserve di generazione L_i e della riserva globale L devono essere introdotti gli appropriati termini di covarianza. Ragionando analogamente ai termini di varianza, la covarianza è data da:

$$\text{Cov}(\hat{C}_{i_1 j_1}, \hat{C}_{i_2 j_2}) = \hat{m}_{i_1 j_1} \hat{m}_{i_2 j_2} \text{ var}(\hat{\mu}_{i_1 j_1}, \hat{\mu}_{i_2 j_2})$$

Solitamente essi possono essere indirettamente calcolati se la matrice di covarianza dei parametri stimati è disponibile nei pacchetti software usati per la stima dei modelli lineari generalizzati.

variazione (rapporto tra deviazione standard e *best estimate*), il *risk margin* (calcolato, ad esempio, come 75-esimo percentile). I box 3.8, 3.9 e 3.10 illustrano alcuni dettagli specifici della metodologia *bootstrap*.

Box 3.8. Il *Bootstrapping*

Si riprende la diagonale principale dei pagamenti cumulati e si utilizzano i fattori di sviluppo del chain-ladder a ritroso come segue.

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001				714
	2002			731	
	2003	333	649		
	2004	298			

$+649/1,95=333$

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001				714
	2002	326	636	731	
	2003	333	649		
	2004	298			

$+731/1,15=636$
 $+636/1,95=326$

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	307	598	688	714
	2002	326	636	731	
	2003	333	649		
	2004	298			

$+714/1,04=688$
 $+688/1,15=598$
 $+598/1,95=307$

Si generano i primi pseudo-dati cumulati nonché, decumulando i dati sottraendo le celle contigue da destra verso sinistra, gli pseudo-dati incrementali, ovvero:

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	307	291	90	27
	2002	326	310	95	
	2003	333	316		
	2004	298			

Box 3.9. Il *Bootstrapping* (segue)

Eseguendo, per ogni cella, la differenza tra gli pseudo-dati appena determinati e i dati originali sui pagamenti incrementali, e dividendo per la radice quadrata degli pseudo-dati, si ottengono i residui di Pearson; moltiplicando tali residui per il fattore di correzione otteniamo i successivi residui di Pearson corretti:

Residui di Pearson

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	- 0,39	- 0,07	0,85	0,00
	2002	0,51	0,02	- 0,97	
	2003	- 0,19	0,20		
	2004	-			

Il fattore di correzione, avendo 10 dati osservati e 8 parametri, 4 generazioni e 4 anni di sviluppo, uguale per tutti i residui, è pari a:

$$\sqrt{\frac{10}{10-8-1}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1,83$$

Residui di Pearson corretti

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	- 0,72	- 0,13	1,56	0,01
	2002	0,93	0,03	- 1,77	
	2003	- 0,35	0,36		
	2004	-			

Viene dunque effettuata l'operazione di rimescolamento dei residui.

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	- 0,13	0,01	0,36	0,93
	2002	1,56	1,56	- 0,35	
	2003	- 0,72	0,03		
	2004	- 1,77			

Si calcolano, invertendo la formula (sommando agli pseudo pagamenti incrementali originali alla radice degli stessi moltiplicata per i residui rimescolati), le tavole dei nuovi pseudo-pagamenti incrementali

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001	304	291	93	31
	2002	354	337	92	
	2003	320	317		
	2004	268			

Box 3.10. Il *Bootstrapping* (segue)

e infine, applicando il chain-ladder, la nuova tavola dei pagamenti incrementali futuri, ovvero una nuova stima della riserva che però non viene registrata.

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001				
	2002				36
	2003			92	33
	2004		259	76	27

Infatti se si salvasse il risultato e si reiterasse il ciclo, alla fine si avrebbe una deviazione standard che tiene conto della sola varianza delle stime. Al fine di determinare la varianza della previsione contenente anche la varianza del processo occorre simulare una distribuzione di Poisson con sovra dispersione (tale coefficiente di sovra dispersione è stimato a partire dai residui di Pearson) approssimata per ogni cella.

Tale simulazione conduce alla determinazione della stima di riserva ovvero:

		Anno di anzianità			
		1	2	3	4
Anno di avvenimento	2001				
	2002				38
	2003			90	37
	2004		263	65	20

Stima di riserva 513.

Ripetendo la procedura, a partire dalla fase del rimescolamento, (con qualche migliaio di iterazioni) e registrando i risultati volta per volta, si ottiene una distribuzione della variabile aleatoria riserva sinistri.

CAPITOLO 4. REQUISITI DI RISERVA E DI CAPITALE PER LE PASSIVITÀ DANNI

4.1 L'impostazione del problema secondo *Solvency II*

La Commissione Europea, nell'ambito del progetto *Solvency II*, ha invitato il CEIOPS ad esplicitare quantitativamente, attraverso *standard* comuni, il principio generale di prudenza contenuto nelle direttive, per promuovere in Europa un approccio più armonizzato per il livello di prudenza da includere nelle riserve tecniche.

Come già accennato, il nuovo standard sarà definito da una *best estimate* più un *risk margin* volto ad esplicitare il livello di incertezza dei *cash-flow* futuri. Si è già riferito (cfr. cap. 3, par. 3.1) come per la riserva sinistri una definizione di *best estimate* e *risk margin* può essere fornita esclusivamente mediante l'applicazione di un modello di stima stocastico ai pagamenti storici dei sinistri. Infatti, in tal caso appare naturale assumere che la *best estimate* sia ricavata dalla media della distribuzione della stima della OLL e che il *risk margin* sia inteso quale opportuno *risk loading*, dipendente dalla variabilità del processo di liquidazione futura dei sinistri.

Tuttavia, mentre la definizione di *best estimate* come aspettativa (o valore medio) della distribuzione di probabilità dei futuri *cash-flow* è diffusamente accettata, per quanto riguarda la definizione quantitativa del *risk margin* è invece in corso un dibattito, anche se è opinione comune che esso debba rappresentare un margine prudenziale richiesto per "compensare" l'incertezza che grava sugli importi futuri delle prestazioni, ovvero, secondo una impostazione coerente con la *fair valuation*, il premio al rischio che un altro assicuratore richiederebbe, in una libera trattativa di mercato, per rilevare gli impegni in-essere nel portafoglio considerato.

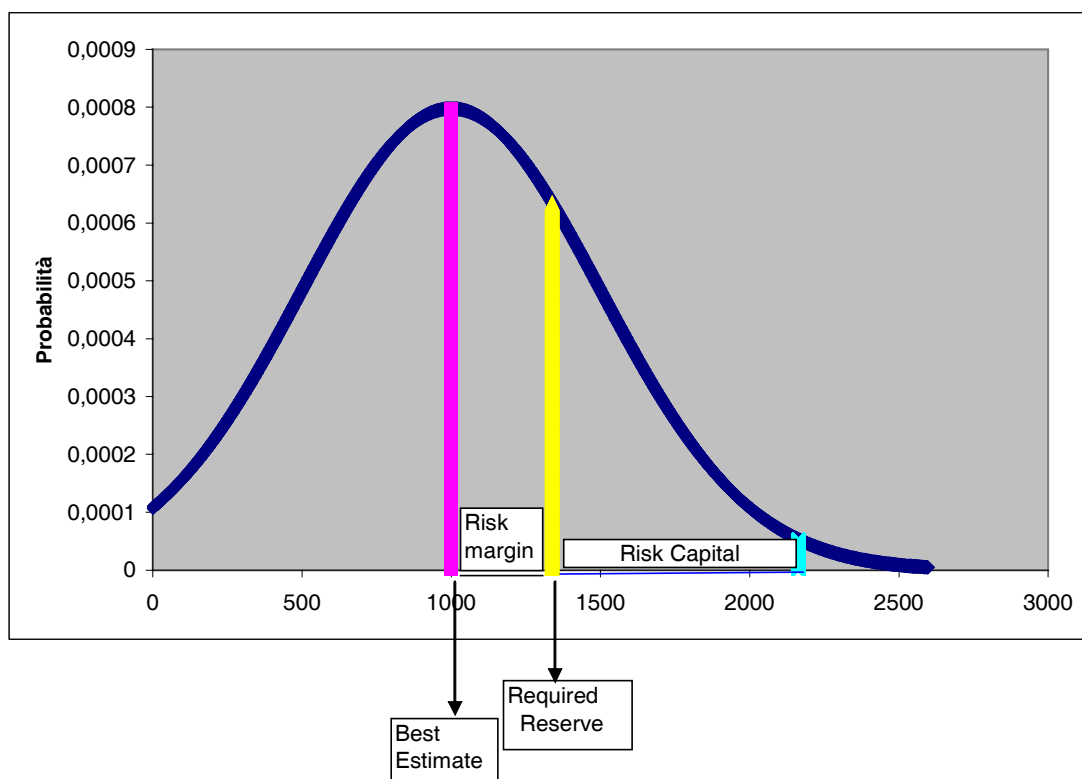
Per la definizione della seconda componente sono quindi in corso di discussione due principali approcci:

- *quantile approach* (proposto originariamente dalla Commissione secondo l'impostazione della Vigilanza Australiana), in base al quale il *risk margin* è definito distanza tra la *best estimate* e il valore di OLL scelto ad un prefissato livello di probabilità, tipicamente uguale al 75-esimo o 90-esimo percentile (cfr. grafico 4.1);
- *cost-of-capital approach* (sostenuto dal CRO Forum¹), per il quale il *risk margin* è dato dal costo del patrimonio di vigilanza (*reserve risk capital*) richiesto dalla normativa per coprire il rischio di insolvenza fino all'estinzione completa della riserva sinistri. Esso è pari alla sommatoria dei valori attuali derivanti dal costo per il premio al rischio (differenza tra il tasso di remunerazione richiesto

¹CRO Forum 2006 [8]; il *Chief of Risk Officer Forum* raggruppa 13 primari gruppi assicurativi europei, tra cui Generali e Allianz.

dall'azionista e quello di un investimento *risk-free*), moltiplicato i rispettivi capitali di solvibilità annuali fino ad estinzione della passività. (Nello *Swiss-Solvency Test* tale *spread* è costante al livello del 6% ed è stabilito dall'Autorità di vigilanza).

Grafico 4.1. Scomposizione della *Required Reserve*



Per fissare il *risk margin* come costo del capitale è ovviamente necessario definire quale capitale prendere a riferimento per il calcolo. Al riguardo, considerato che la riserva sinistri – pur includendo un *risk margin* – può risultare a fine anno insufficiente a coprire una inattesa perdita sui pagamenti, viene richiesta all'assicuratore, oltre al *risk margin*, anche una disponibilità di capitale di vigilanza (*reserve risk capital*). Per determinarne l'ammontare viene selezionato un valore particolarmente pessimistico del fabbisogno di riserva (*Worst case*) con orizzonte temporale di un anno, determinato sulla base di un livello prefissato (elevato) di probabilità. Il patrimonio di vigilanza che l'impresa deve detenere a fronte del rischio di insufficienza è dato allora dalla differenza tra il *Worst case* e la riserva richiesta (*best estimate* più *risk margin*) (vedi grafico 4.1). La misura del *risk capital* dipende quindi dalla misura del rischio utilizzata come *Worst case* (*Value at Risk*, *Expected Shortfall*, ecc.) e dal livello di confidenza prescelto (es. 95%, 99%, 99,5%).

Per una precisa individuazione delle grandezze suesposte, lo studio ha comportato, tra l'altro, la risoluzione di delicate questioni teoriche e metodologiche aventi significative implicazioni operative nei calcoli del *risk margin* e del *reserve risk capital*, quali, ad esempio:

- un approccio stocasticamente corretto, ai fini del calcolo del *reserve risk capital*, per ricavare, all'epoca di valutazione della riserva, la distribuzione sia dei pagamenti per sinistri (*liability*), sia dell'aspettativa di riserva (residua) nell'esercizio successivo (entrambe variabili casuali costituenti l'impegno di "primo anno" dell'assicuratore);
- la determinazione della quota di *risk margin* da sottrarre al *worst case* nel calcolo del *risk capital* di primo anno (per evitare il doppio conteggio di capitale), nel caso di passaggio da una distribuzione di probabilità *risk adjusted* a quella naturale, dovuto all'assenza di un mercato di riferimento per le *liability* danni;
- la soluzione, nel caso del *risk margin* determinato come *cost of capital*, del problema della cosiddetta *circularità* della definizione²;
- il controllo, nel caso del *discounting*, della sub-additività dei *risk margin* dovuta all'effetto di diversificazione (la somma dei *risk margin* delle singole generazioni sinistri è superiore al *risk margin* della somma delle stesse, dopo la diversificazione); proprietà che può comportare effetti distorsivi nei calcoli dei valori attualizzati (si può avere, ad esempio, il caso "paradossale" di una riserva scontata – ma non diversificata – di importo superiore a quella non scontata diversificata).

L'inosservanza o la sottovalutazione di tali aspetti può condurre all'applicazione di tecniche di calcolo approssimative con riflessi negativi sugli stessi livelli di prudenzialità richiesti da *Solvency II* (es. *risk margin* o *risk capital* inferiori a quelli correttamente calcolati).

Durante i lavori si è pertanto reso necessario esplorare varie opzioni di calcolo sviluppando diverse soluzioni, sia esatte che approssimate, per il calcolo del *reserve risk capital* e dei *risk margin*. Si è quindi operato nell'ambito di un *framework* di riferimento – cui è dedicato il presente capitolo – originato da una impostazione finanziaria del problema coerente con il principio della *fair valuation*.

4.2 Un caso semplificato: passività in unica scadenza e senza sconto

Si consideri al tempo t un particolare ramo assicurativo danni e si rappresenti con L l'importo totale dei pagamenti futuri dovuti dall'assicuratore (*Outstanding Loss, Liabilities, OLL*)³. Si fa l'ipotesi che il pagamento di L avvenga in una sola scadenza futura T e che non venga considerato l'effetto dovuto allo sconto. Pertanto L sarà una variabile aleatoria al tempo t .

²Per il calcolo del costo del capitale è necessario conoscere il *risk capital*. Quest'ultimo, a sua volta, è misurato sulla riserva sinistri nella quale figura il costo del capitale come *risk margin*.

³Secondo lo schema di riferimento presentato nel cap. 3, L sarà uguale alla somma (non scontata) delle riserve L_i delle singole generazioni sinistri ($L = \sum_{i=2}^n L_i$). Alternativamente L può essere definita come somma (non scontata) dei futuri pagamenti Y_τ in ciascun anno di bilancio ($L = \sum_{i=2}^T Y_\tau$)

4.2.1 Riserva sinistri regolamentare non scontata

In queste ipotesi, si indica con R^* la riserva richiesta (*required reserve*) – ad esempio da una nuova regolamentazione o dal supervisore –, definita come somma della *best estimate* \bar{L} degli impegni in essere a fine dell'esercizio per pagare i sinistri (OLL) e di un *risk margin* δ (non negativo):

$$R^* := \bar{L} + \delta; \quad (4.1)$$

la definizione individua soltanto le componenti logiche rilevanti, che tuttavia debbono essere precisate in maniera adeguata per rendere tale definizione operativa in senso computazionale.

4.2.2 Best estimate

Per quanto concerne il concetto di *best estimate*, una definizione in linea con i principi attuariali di valutazione si ottiene definendo la \bar{L} come aspettativa $E(L)$ della distribuzione di probabilità dei pagamenti L . Si osserva che nelle applicazioni pratiche, come già accennato al cap. 3, applicando un opportuno modello statistico sui dati osservati, considerati come estratti da un campione casuale, si ottiene il *predicted value* \hat{L} , anch'esso una variabile casuale. La distribuzione predittiva di \hat{L} fornisce la distribuzione di probabilità delle OLL.

4.2.3 Fair value e risk margin

Se la definizione della *best estimate* \bar{L} come aspettativa $E(L)$ è diffusamente accettata ⁴ la definizione di *risk margin* è ancora un problema aperto, anche se è opinione comune che esso debba rappresentare un margine prudenziale richiesto a fronte dell'incertezza che grava sugli importi futuri delle prestazioni.

Se si ammette, come è ragionevole, che tale margine non debba rappresentare la “copertura” completa di tale incertezza, si può definire il requisito di riserva R^* come il valore “di mercato” – valore *market-consistent* – del debito dell'assicuratore verso gli assicurati.

In altri termini, detto valore sarebbe l'importo che in un mercato competitivo una terza parte ben informata richiederebbe per rilevare gli obblighi dell'assicuratore. Tale impostazione è in linea con la definizione di *fair value* V delle passività assicurative. Pertanto secondo questa ipotesi si assume:

$$R^* = \mathcal{V}(t; L), \quad (4.2)$$

dove con $V = \mathcal{V}(t; L)$ si è rappresentato il prezzo di mercato al tempo t dell'importo aleatorio degli obblighi futuri, ossia il *fair value* delle OLL.

Quindi R^* è il prezzo di mercato (o un valore *market consistent*) V dell'importo aleatorio L e il *risk margin* risulta implicitamente definito dal caricamento (*risk loading*) λ – da aggiungere all'aspettativa

⁴In alcuni casi \hat{L} è stata proposta anche come mediana, cioè 50-esimo percentile, della distribuzione.

$E(L)$ – richiesto nel mercato da investitori avversi al rischio per diventare titolari della passività L . In questo senso il caricamento può essere denominato appropriatamente *market value margin*⁵

Nell'ipotesi di *fair valuation* (FV) il requisito di riserva R^* rappresenta la valutazione di mercato dell'*equivalente certo* \bar{L} dell'importo aleatorio L ⁶.

4.2.4 Il requisito di capitale per il rischio di insufficienza della riserva sinistri (*reserve risk capital*)

Il requisito di riserva, sebbene contenga un *risk margin*, non soddisfa i principî della solvibilità secondo *Solvency II*. Per garantire la solvibilità ad un assegnato livello di probabilità (“livello di tolleranza”) deve essere considerato un *Risk Adjusted Value* (RAV).

Il RAV di L rappresenta un valore prudenziale $\mathbf{W}(L)$ (un “*worst case value*”) associato alle passività. Per esempio $\mathbf{W}(L)$ può essere individuato come quel valore di L che non verrà superato con un prefissato – e sufficientemente alto – livello di probabilità (livello di confidenza, livello di sicurezza)⁷. Valgono le disuguaglianze:

$$\bar{L} < R^* < \mathbf{W}(L).$$

Cioè la riserva richiesta sarà compresa tra gli importi della *best estimate* e del *worst case*. Fissato il livello di tolleranza (sicurezza), il requisito di solvibilità – cioè il capitale di sicurezza richiesto all'assicuratore – è l'importo K definito dalla:

$$K := \mathbf{W}(L) - R^* = \mathbf{W}(L) - \bar{L} - \delta. \quad (4.4)$$

Questo importo è detto anche *reserve risk capital*, al livello di probabilità assegnato.

Valore non anticipato delle passività (*unanticipated loss*)

Si consideri un generico importo aleatorio X ; in riferimento al RAV $\mathbf{W}(X)$ è significativo definire il valore “non anticipato” (*unanticipated value*) di X , come la differenza:

$$\mathbf{U}(X) := \mathbf{W}(X) - \mathbf{E}(X).$$

⁵Da un punto di vista più prudenziale il *risk margin* δ potrebbe includere un caricamento aggiuntivo ε per tener conto del “rischio di modello”. La definizione generale di *risk margin* potrebbe essere quindi:

$$\delta := \lambda + \varepsilon, \quad (4.3)$$

dove λ rappresenta il *market value margin*. Nell'ipotesi di *fair valuation* è $\varepsilon = 0$. Tale espressione con $\varepsilon = 0$ sembra anche la definizione adottata nello *Swiss Solvency Test*.

⁶Il concetto di equivalente certo è ben noto nella teoria tradizionale dell'utilità attesa. In questa impostazione quindi, l'espressione (4.1) ripropone la rappresentazione del premio c come somma del premio equo e del caricamento di sicurezza, dove il caricamento è determinato nelle condizioni caratteristiche del mercato competitivo.

⁷Il livello di probabilità – e quindi il RAV – è collegato al rating dell'impresa; ma potrebbe essere anche uno strumento per tutelare la stabilità di mercato e, in questo senso, potrebbe essere fissato dal regolamentatore.

Con questa definizione l'espressione (4.4) diventa:

$$K = \mathbf{U}(L) - \delta, \quad (4.5)$$

e consente di caratterizzare il *risk capital* come differenza tra la perdita non anticipata (*unanticipated loss*) – che dipende dal livello di probabilità del RAV – e il *risk margin*. Si ricorda che l'aspettativa $\mathbf{E}(L)$ è anche detta perdita anticipata (*anticipated loss*). Quindi la riserva regolamentare R^* può essere interpretata anche come somma della perdita anticipata (*anticipated loss*) e del *risk margin*.

Nella situazione semplificata in esame (passività concentrate su una singola scadenza T e senza considerare lo sconto) il RAV delle OLL richiesto dal regolamentatore all'assicuratore può essere scomposto nella somma della riserva regolamentare R^* e del *risk capital* K .

È importante osservare che (almeno nell'ipotesi FV) l'importo R^* rappresenta il prezzo di mercato delle OLL e, in linea di principio, dovrebbe essere fornito dagli assicurati, tramite i premi versati. L'importo corrispondente alla seconda componente è conferito dagli azionisti e, con alta probabilità, sarà di nuovo "libero" dopo che sarà pagata la passività.

Tuttavia per la valutazione della redditività del ramo assicurativo deve essere considerato un costo da interessi sull'importo K , dovuto al rendimento (del capitale) richiesto dagli azionisti.

Il costo del risk capital e il risk margin come costo del risk capital

Indichiamo con h il tasso di rendimento richiesto dagli azionisti al tempo t per investire nell'asset rischioso rappresentato dal ramo assicurativo considerato. Se i è il tasso *risk-free* di mercato, il costo (per interessi) al tempo t del *reserve risk capital* è (sempre ignorando il *discounting*):

$$\kappa := s K,$$

dove $s := h - i$ è lo *spread* tra il rendimento richiesto dagli azionisti e quello *risk-free*. In un mercato dei capitali efficiente l'extra-rendimento s è non-negativo e rappresenta il *premio al rischio* richiesto all'equilibrio dagli investitori per detenere la security assicurativa.

Quindi può aver senso utilizzare il costo del *risk capital* κ come una approssimazione del *risk margin* δ . Ponendo $\delta = \kappa = s K$ nella (4.5) si ha $K = \mathbf{U}(L) - s K$; quindi si ottiene:

$$K = \frac{\mathbf{W}(L) - \bar{L}}{1 + s}, \quad (4.6)$$

e:

$$\delta = \frac{s}{1 + s} [\mathbf{W}(L) - \bar{L}]. \quad (4.7)$$

Dato che è $R^* = \bar{L} + \delta$, il requisito di riserva può essere espresso come:

$$R^* = \frac{\bar{L} + s \mathbf{W}(L)}{1 + s}. \quad (4.8)$$

Con l'approccio del costo del capitale i *problemi del requisito di riserva e di capitale si unificano quindi in un singolo problema:* ⁸

- *il risk capital e il market value margin vengono determinati simultaneamente dalle espressioni (4.6) e (4.7) una volta specificati il RAV $W(L)$ e lo spread s ;*
- *in questo schema semplificato la riserva regolamentare risulta essere la media ponderata della best estimate L e del RAV, con pesi $1/(1+s)$ e $s/(1+s)$, rispettivamente.*

4.2.5 Esempi

Sia $\bar{L} := \mathbf{E}(L)$ la *best estimate* di L ; si possono considerare alcune forme rilevanti di R^* e del RAV.

a) Senza risk margin, il RAV come percentile.

$$\delta = 0, \quad \mathbf{W}(L) = \mathbf{Q}^{(99.9)}(L),$$

dove $\mathbf{Q}^{(\alpha)}(L)$ è l' α -esimo percentile di L . Per cui:

$$R^* = \mathbf{E}(L), \quad K = \mathbf{Q}^{(99.9)}(L) - \mathbf{E}(L).$$

La riserva regolamentare è data dalla perdita attesa (*expected loss*); e il *risk capital* è uguale alla perdita inattesa (*unexpected loss*) al livello di confidenza del 99.9%.

b) Risk margin e RAV come percentile.

$$\delta = \mathbf{Q}^{(75)}(L) - \mathbf{E}(L), \quad \mathbf{W}(L) = \mathbf{Q}^{(99.9)}(L).$$

Quindi risulta:

$$R^* = \mathbf{Q}^{(75)}(L), \quad K = \mathbf{Q}^{(99.9)}(L) - \mathbf{Q}^{(75)}(L).$$

c) Risk margin e RAV come funzioni σ -affini.

$$\delta = \eta' \mathbf{Std}(L), \quad \mathbf{W}(L) = \mathbf{E}(L) + \eta'' \mathbf{Std}(L), \quad \eta'' > \eta' > 0;$$

dove $\mathbf{Std}(L)$ è la deviazione standard di L (quindi δ e \mathbf{W} sono proporzionali al "sigma" delle OLL). In questo caso:

$$R^* = \mathbf{E}(L) + \eta' \mathbf{Std}(L), \quad K = (\eta'' - \eta') \mathbf{Std}(L).$$

⁸L'approccio al costo del capitale proposto dal CRO Forum è basato su assunzioni simili. Tuttavia il problema di una coerente definizione di *risk capital* e *risk margin* – il "problema della circolarità" – non è pienamente risolto, poiché le due misure sono determinate indipendentemente (si veda CFO Forum 2006 [8], p. 22).

d) *Risk margin come costo del capitale, il RAV come percentile.*

$$\delta = \kappa = sK, \quad \mathbf{W}(L) = \mathbf{Q}^{(99.9)}(L);$$

che implica:

$$R^* = \frac{\mathbf{E}(L) + s \mathbf{Q}^{(99.9)}(L)}{1 + s}, \quad K = \frac{\mathbf{Q}^{(99.9)}(L) - \mathbf{E}(L)}{1 + s}.$$

e) *Risk margin come costo del capitale, RAV come expected shortfall.*

$$\delta = \kappa = sK, \quad \mathbf{W}(L) = \mathbf{S}^{(99.9)}(L),$$

dove $\mathbf{S}^{(\alpha)} := \mathbf{E}(L | L \geq \mathbf{Q}^{(\alpha)})$ è l'*expected shortfall* al livello α , cioè la perdita attesa oltre l' α -esimo percentile. Si ha:

$$R^* = \frac{\mathbf{E}(L) + s \mathbf{S}^{(99.9)}(L)}{1 + s}, \quad K = \frac{\mathbf{S}^{(99.9)}(L) - \mathbf{E}(L)}{1 + s}.$$

4.3 Il caso reale: riserva e capitale di sicurezza per prestazioni distribuite nel tempo

Le prestazioni generate dai contratti assicurativi hanno una struttura complessa che si sviluppa su ampi intervalli temporali. Anche nell'assicurazione danni le *liability* dei rami cosiddetti "long-tailed" coprono orizzonti che possono superare i dieci anni. Questa caratteristica temporale e i conseguenti effetti di sconto debbono essere considerati adeguatamente nella definizione della riserva e del *risk capital*.

Al tempo $t = 0$, che si assumerà coincidere con la fine di un anno di bilancio, si considerino le passività generate dalle polizze danni (emesse negli anni precedenti). Le OLL siano rappresentate dal flusso di importi aleatori:

$$\mathbf{Y} := \{Y_\tau; \tau = 1, 2, \dots, T\},$$

che coprono un orizzonte di T anni; si assumerà che l'importo Y_τ sia pagato alla fine dell'anno τ . Nell'ipotesi FV la riserva regolamentare al tempo $t = 0$ è data da $R_0^* = V_0$, dove:

$$V_0 := \mathcal{V}(0; \mathbf{Y}),$$

è il *fair value* delle passività.

In riferimento alle argomentazioni precedenti e per omogeneità di notazione si indicherà con:

$$L := \sum_{\tau=1}^T Y_\tau,$$

la somma delle OLL.

4.3.1 Il fair value delle passività

La teoria dei mercati efficienti fornisce una definizione formale di *fair value* di un flusso di pagamenti. Sia $v(t, t + \theta)$ il prezzo di mercato al tempo t di uno zero-coupon bond (ZCB) unitario con maturity $t + \theta$, non affetto da rischio di default (*default-free*); in altri termini $v(t, t + \theta)$ è il valore (di mercato) di un'unità di capitale che sarà pagata con certezza dopo θ unità di tempo. Per definizione si ha:

$$v(t, t + \theta) := [1 + i(t, t + \theta)]^{-\theta};$$

dove $i(t, t + \theta)$ è il tasso di interesse non rischioso osservato sul mercato al tempo t per la scadenza $t + \theta$.

Per semplicità si assuma che non ci sia incertezza sui tassi di interesse futuri, per cui i prezzi futuri $v(t, t + \theta)$ siano noti al tempo zero⁹.

Al tempo $\tau = 0, 1, \dots, T$ sia:

$$\mathbf{Y}^{(\tau)} := \{Y_\theta; \theta = \tau + 1, \tau + 2, \dots, T\},$$

il flusso residuo delle passività, ovvero di quelle ancora in essere alla fine dell'anno τ . Ovviamente è $\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}^{(T)} = 0$.

Per il principio di arbitraggio in mercati perfetti, il *fair value* delle OLL al tempo τ può essere rappresentato nella forma:

$$V_\tau := \mathcal{V}(\tau; \mathbf{Y}^{(\tau)}) = \sum_{\theta=\tau+1}^T v(\tau, \theta) \mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta), \quad (4.9)$$

dove \mathbf{E}_τ^Q è l'aspettativa al tempo τ calcolata con la misura di probabilità *risk-neutral*.

Questa aspettativa considera implicitamente – per definizione – il *risk loading* di mercato rispetto all'aspettativa “naturale” $\mathbf{E}_\tau(Y_\theta)$; quindi $\mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta)$ può essere interpretata come equivalente certo fissato al tempo τ dal mercato per l'importo aleatorio Y_θ ; il corrispondente caricamento di mercato per il rischio (*market risk loading*) è dato quindi dalla differenza tra le due aspettative:

$$\gamma(\tau, \theta) := \mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta) - \mathbf{E}_\tau(Y_\theta), \quad (4.10)$$

ed è non negativo, poiché si è assunto che gli agenti siano avversi al rischio.

La proprietà di linearità del funzionale di prezzo \mathcal{V} , derivante dall'ipotesi di mercati perfetti, ovviamente implica:

$$\mathcal{V}(\tau; \mathbf{Y}^{(\tau)}) = \sum_{\theta=\tau+1}^T \mathcal{V}(\tau; Y_\theta), \quad (4.11)$$

⁹In molte applicazioni all'assicurazione danni l'ipotesi di tassi di interesse certi è una approssimazione accettabile nei problemi di valutazione. Naturalmente possono essere definiti e utilizzati modelli stocastici di struttura dei tassi di interesse, che implicano una più complessa formalizzazione e maggiori complessità nella calibrazione del modello sui dati di mercato.

dove:

$$\mathcal{V}(\tau; Y_\theta) := v(\tau, \theta) \mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta), \quad (4.12)$$

è il *fair value* della *liability* individuale Y_τ . Al tempo zero si ha:

$$V_0 := \mathcal{V}(0; \mathbf{Y}) = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \bar{\bar{Y}}_\tau, \quad (4.13)$$

dove è $v_\tau := v(0, \tau)$ e dove $\bar{\bar{Y}}_\tau := \mathbf{E}_0^Q(Y_\tau)$ è l'equivalente certo al tempo zero di Y_τ .

Il valore "cum praestatione" degli impegni dell'assicuratore

Entro la fine dell'esercizio successivo a quello di prima valutazione ($t = 0$) della riserva sinistri, gli impegni dell'assicuratore sono costituiti dal pagamento dei sinistri di *maturity* 1 e dalla riserva residua valutata in $t = 1$. Se ci collochiamo immediatamente prima dei pagamenti del successivo (prossimo) esercizio e della nuova valutazione della riserva (residua), possiamo definire tali impegni come valore cum-praestatione V_τ^- :

$$V_\tau^- := Y_\tau + V_\tau;$$

cioè il *fair value* delle OLL nell'istante immediatamente precedente al pagamento della *liability* Y_τ è uguale alla somma dei *fair value* dei pagamenti e della riserva residua. Per la quantità "*cum-praestatione*" vale la proprietà fondamentale :

$$v_1 \mathbf{E}_0^Q(V_1^-) = V_0. \quad (4.14)$$

Tale proprietà esprime il fatto che il *fair value* al tempo 0 è il valore atteso calcolato con le probabilità *risk neutral* degli impegni "*cum praestatione*" al tempo 1 ¹⁰.

4.3.2 Il valore attuale atteso delle passività

Definito il *fair value* delle passività (*liability*) attraverso le probabilità *risk neutral*, è possibile definire, utilizzando le probabilità naturali, il valore attuale atteso al tempo τ delle OLL, nell'ipotesi di tassi di interesse deterministici, come:

$$M_\tau := \sum_{\theta=\tau+1}^T v(0, \tau, \theta) \mathbf{E}_\tau(Y_\theta), \quad (4.15)$$

dove $v(0, \tau, \theta) := \frac{v_\theta}{v_\tau}$ è il tasso a termine al tempo zero per il periodo da τ a θ ¹¹. La grandezza M_τ si può definire *best estimate scontata* delle OLL al tempo τ .

Al tempo zero risulta:

$$M_0 = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \bar{\bar{Y}}_\tau, \quad (4.16)$$

¹⁰La proprietà deriva dal fatto che il processo del prezzo scontato è una martingala rispetto alla misura di probabilità *risk neutral*; per dettagli si rimanda a De Felice, Moriconi 2006 [10].

¹¹Si veda, ad esempio, Castellani, De Felice, Moriconi 2005 [3], pp. 340-341.

dove \bar{Y}_τ è l'aspettativa $\mathbf{E}_0(Y_\tau)$ di Y_τ .

Considerata quindi la *best estimate* scontata “*cum praestatione*”:

$$M_\tau^- := Y_\tau + M_\tau, \quad (4.17)$$

si dimostra, anche in questo caso, la proprietà:

$$v_1 \mathbf{E}_0(M_1^-) = M_0. \quad (4.18)$$

4.3.3 La riserva come *fair value* delle passività

Ponendoci ad un generico tempo τ ($\tau = 0, 1, \dots, T$), nell'ipotesi FV la riserva regolamentare R_τ^* delle OLL al tempo τ è data dal *fair value* del flusso residuo dei pagamenti futuri:

$$R_\tau^* := V_\tau = \mathcal{V}(\tau; \mathbf{Y}^{(\tau)}), \quad \tau = 0, 1, \dots, T. \quad (4.19)$$

Come già affermato, R_τ^* , in quanto prezzo di mercato, comprende implicitamente il caricamento λ_τ da aggiungere all'aspettativa per la rischiosità dell'attività assicurativa. Considerando le espressioni V_τ (*fair value* dei pagamenti futuri) e M_τ (valore attuale atteso degli stessi), siamo in grado di esplicitare formalmente il *market value margin*. Infatti esso è pari al valore attuale in τ dei futuri caricamenti per il rischio corrispondenti ad ognuno degli importi residui da corrispondere alle singole scadenze annuali fino all'estinzione completa delle passività. I caricamenti a loro volta scaturiscono dalla differenza tra le probabilità *risk neutral* (o caricate per il rischio) e quelle naturali, ovvero:

$$\begin{aligned} \lambda_\tau := V_\tau - M_\tau &= \sum_{\theta=\tau+1}^T v(\tau, \theta) [\mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta) - \mathbf{E}_\tau(Y_\theta)] \\ &= \sum_{\theta=\tau+1}^T v(\tau, \theta) \gamma(\tau, \theta). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Al tempo zero si ha:

$$\lambda_0 = V_0 - M_0 = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \gamma_\tau, \quad (4.21)$$

dove $\gamma_\tau := \gamma(0, \tau)$.

4.3.4 Casi particolari

In riferimento allo schema generale possono essere definiti casi particolari, utili per le applicazioni e per confronti logici e quantitativi.

Il caso “non scontato”

Il caso che si può definire “non scontato” riprende lo schema logico considerato nel paragrafo introduttivo 4.2; si ottiene ponendo $v(t, t + \theta) = 1$ per tutti i t e tutti i θ , ovvero assumendo una struttura dei tassi di interesse deterministica e piatta (costante) al livello zero.

In questo caso non ha effetto considerare la struttura temporale delle OLL; è “come se” l’importo totale delle prestazioni $L = \sum_{\tau=1}^T Y_{\tau}$ avesse scadenza immediatamente successiva alla data di valutazione.

Il caso “piatto” (flat)

Si caratterizza come caso “piatto” il caso “non scontato” senza *risk margin*, cioè assumendo $\gamma(\tau, \theta) = 0$ per tutti i τ e tutti i θ . In questo caso la misura di probabilità *risk-neutral* coincide con la misura naturale e la riserva regolamentare R^* è data dalla sola *best estimate* \bar{L} dell’importo totale delle prestazioni.

Il caso piatto corrisponde alla tecnica di calcolo tradizionale della riserva sinistri, per cui si assume che la valutazione a importi non scontati sia un modo di considerare implicitamente un caricamento adeguato¹².

Caso uniperiodale

Il caso uniperiodale si ha in riferimento a un portafoglio caratterizzato da un’unica prestazione, in $T = 1$. È un caso di studio, di solito utilizzato a fini illustrativi; consente di considerare l’effetto sconto, impiegando v_1 , e il *risk margin* $\lambda_0 = v_1 \gamma_1$; ma nasconde nell’ambiguità – indotta dal collasso dei tempi – molti significati complessi tipici del processo di calcolo della riserva e del capitale di sicurezza.

4.3.5 Il *risk capital* di riserva nella logica dell’orizzonte annuale

Per soddisfare la logica della solvibilità, la riserva e il *risk capital* debbono essere coperti – teoricamente istante per istante – per l’intera durata del flusso delle OLL, cioè sino al pagamento dell’ultima passività Y_T .

In pratica, e conformemente ai principî della solvency, il requisito di *risk capital* può essere definito e soddisfatto considerando un intervallo temporale di riferimento, tipicamente un anno: al tempo zero si calcola il RAV W_0 rispetto agli obblighi dell’assicuratore definiti alla data di chiusura del prossimo bilancio; quindi il processo si itera di anno in anno per tutta la durata delle *liability*.

¹²Sebbene possa essere giudicato anche eccessivamente naïve riguardo alla logica finanziaria, il caso piatto continua a presentare notevole complessità riguardo alla caratterizzazione probabilistica delle OLL. La maggior parte dei modelli stocastici per il calcolo della riserva sono costruiti su questa ipotesi.

Questa procedura ricorsiva genererà una sequenza di *risk capital* annuali K_0, K_1, \dots , dove il generico K_τ è il *risk capital* richiesto al tempo $t + \tau$ per il periodo (annuale) che termina in $t + \tau + 1$.

Una definizione di RAV considerata adeguata si ottiene definendo W_0 come l' α -percentile $Q_0^\alpha(V_1^-)$ a un livello di probabilità "molto alto" (ad esempio $\alpha = 99.9\%$). Definizioni alternative del RAV sono date considerando misure di rischio coerenti. Ad esempio si può definire W_0 come l'*expected shortfall* $S_0^\alpha(V_1^-)$ al livello di probabilità α .

Si assumerà nel prosieguo un operatore RAV positivamente omogeneo e invariante per traslazioni; cioè tale da soddisfare le proprietà di:

- *omogeneità positiva*: $W_0(cX) = cW_0(X)$ per c costante positiva;
- *invarianza per traslazione*: $W_0(c + X) = c + W_0(X)$ per c costante.

Definizione di *risk capital di riserva*

Si consideri il *risk capital* K_0 richiesto al tempo $t = 0$ per il primo (prossimo) anno. Gli obblighi dell'assicuratore al tempo $t = 1$ sono rappresentati dalla somma di due variabili casuali: la *liability* Y_1 relativa all'anno in corso e la riserva R_1^* richiesta per far fronte al flusso residuo delle OLL (cioè delle *liability* con scadenza successiva a $t = 1$).

Nell'ipotesi FV, gli obblighi dell'assicuratore sono quindi quantificati dal *fair value (cum-praestatione)* V_1^- . Ne consegue che il RAV (relativo agli obblighi di fine anno) è dato da:

$$W_0 := \mathbf{W}_0(V_1^-) = \mathbf{W}_0(Y_1 + V_1). \quad (4.22)$$

Per garantire la disponibilità di questo importo al tempo $t = 1$ è necessario che l'assicuratore abbia a disposizione l'importo $v_1 W_0$ in $t = 0$. Se l'importo $R_0^* = V_0$ è disponibile, il *risk capital di riserva (reserve risk capital)* è dato da:

$$K_0 := v_1 \mathbf{W}_0(V_1^-) - V_0. \quad (4.23)$$

Nel caso uniperiodale (per $T = 1$) risulta $V_1 = 0$, quindi $W_0 = \mathbf{W}_0(Y_1)$ e:

$$K_0 = v_1 \mathbf{W}_0(Y_1) - V_0. \quad (4.24)$$

Già in riferimento al caso uniperiodale è evidente che il calcolo della riserva e il calcolo del *risk capital* definiscono due problemi distinti:

- per la riserva si utilizza la distribuzione *risk-neutral* di Y_1 ;
- per il *risk capital* è necessario individuare il RAV sulla distribuzione naturale di Y_1 .

Nel caso multiperiodale la situazione è più complessa:

- il problema della riserva (problema della *fair valuation*) richiede l'utilizzazione della distribuzione di probabilità T -dimensionale delle variabili aleatorie Y , definita con la misura *risk-adjusted*;

- nell'approccio uniperiodale, il problema di calcolo del *risk capital* (4.23) richiede di utilizzare la distribuzione di probabilità naturale univariata della riserva "futura" V_1^- , che si determina dalla probabilità *risk-adjusted* al tempo $t = 1$.

Quindi le aspettative naturali non sono necessarie – in linea di principio – per determinare la riserva; mentre il calcolo del *risk capital* richiede un "metodo misto" che considera sia le probabilità naturali, sia le *risk-neutral*.

Se fosse disponibile un modello di mercato per determinare il *fair value* V_τ , allora il problema del *risk capital* potrebbe essere risolto con lievi difficoltà aggiuntive¹³. Se non è disponibile un modello robusto per la *fair valuation*, è difficile ottenere misurazioni di *risk capital* coerenti con la definizione (4.23) e perciò bisogna ricorrere ad approssimazioni.

Risk capital secondo la definizione di valore non anticipato

Può essere utile considerare un'altra rappresentazione del *risk capital* basata sulla definizione (già vista al par. 4.2.4) di valore non anticipato $U_0(X) := W_0(X) - E_0(X)$.

In riferimento alla proprietà (4.14), l'espressione (4.23) può anche essere scritta:

$$K_0 = U_0(v_1 V_1^-) - [E_0^Q(v_1 V_1^-) - E_0(v_1 V_1^-)] . \quad (4.25)$$

L'espressione evidenzia che il *risk capital* può essere ottenuto come valore non anticipato degli obblighi di fine anno scontati (calcolato con la distribuzione di probabilità naturale), corretto considerando il *risk margin* di mercato corrispondente.

Nel caso *uniperiodale* si ha:

$$K_0 = U_0(v_1 Y_1) - \lambda_0 , \quad (4.26)$$

dove il *market value margin* è dato da $\lambda_0 = v_1 \gamma_1$.

4.3.6 Misure di *risk capital* approssimate

Le approssimazioni della misura del *reserve risk capital* sono necessarie per due ordini di motivi:

- è opportuno sostituire, nel calcolo del requisito di capitale, le distribuzioni di probabilità *risk neutral*, non identificabili in assenza di un mercato di riferimento per le passività danni, con le distribuzioni di probabilità naturali (corredate coi premi al rischio);
- molti metodi stocastici messi a punto per il calcolo della riserva sinistri forniscono la distribuzione di probabilità dei pagamenti annui futuri alle varie scadenze di bilancio Y_t , ma non producono la distribuzione di probabilità delle corrispondenti aspettative (riserva residua) al tempo 1 (V_1).

¹³Questa è la situazione tipica che si trova nella valutazione delle componenti finanziarie di un portafoglio di polizze sulla vita.

Approssimazione basata sulla variabilità dell'aspettativa di fine anno

La definizione di *risk capital* di riserva è basata sulla variabilità delle prestazioni di fine anno, che sono date dalla somma delle prestazioni Y_1 dell'anno e della nuova riserva V_1 .

La forma approssimata più naturale dell'espressione (4.23) si ha sostituendo la variabilità della riserva di fine anno con la variabilità dell'aspettativa a fine anno del valore (scontato) delle prestazioni future (M_1^-). Attraverso alcuni passaggi formali¹⁴, si sostituisce la variabile degli impegni *cum-praestatione* al *fair value* V_1^- con M_1^- , pervenendo alla seguente approssimazione del *reserve risk capital*.

a) Approssimazione YEE (Year-End Expectation approximation)

È basata sulla sostituzione della variabile casuale *cum-praestatione* V_1^- con la variabile casuale:

$$M_1^- + \lambda_0/v_1 - \gamma_1.$$

Pertanto, sostituendo questo valore al *fair value* *cum-praestatione* V_1^- nell'espressione del RAV relativo agli obblighi di fine anno dell'assicuratore (espressione 4.22), si ottiene la corrispondente forma approssimata:

$$\mathbf{W}_0(V_1^-) \approx \mathbf{W}_0(M_1^- + \lambda_0/v_1 - \gamma_1). \quad (4.27)$$

Questa ipotesi caratterizza l'approssimazione YEE. Utilizzando tale approssimazione e la proprietà di invarianza per traslazione del RAV W_0 (vedi par. 4.3.4), si perviene alla seguente espressione del *reserve risk capital* (approssimato):

$$K_0 = v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0 - v_1 \gamma_1, \quad (4.28)$$

dove γ_1 è il caricamento (*risk loading*) per il rischio relativo ai pagamenti dei sinistri di primo anno Y_1 .

Con l'approssimazione YEE il soddisfacimento del requisito di solvibilità si riduce essenzialmente a un problema che coinvolge la distribuzione naturale univariata della variabile casuale M_1^- . Il calcolo del RAV richiede la specificazione del *risk loading* γ_1 , ma non richiede quella dei *risk loading* futuri $\gamma(1, \tau)$. Si osserva in generale che il termine $v_1 \gamma_1$ non è trascurabile, poiché nei portafogli tipici dei rami danni le *liability* Y_τ sono decrescenti con la scadenza τ e l'importo Y_1 di primo anno può essere della stessa entità della somma di tutte le altre successive passività.

Facendo uso della rappresentazione del *risk capital* basata sulla definizione di valore non anticipato U (cfr. par. 4.2.4), e sempre secondo l'approssimazione YEE, il *risk capital* può anche essere rappresentato nella forma:

$$K_0 = U_0(v_1 M_1^-) - v_1 \gamma_1, \quad (4.29)$$

¹⁴Si veda De Felice, Moriconi 2006 [10].

cioè come differenza tra il valore non anticipato dell'aspettativa scontata di fine anno e il termine "correttivo" $v_1\gamma_1$, che tiene conto del *risk loading* sull'importo di primo anno non catturato dall'aspettativa naturale.

a.1) Approssimazione YEE φ -scontata (φ -discounted YEE approximation)

Una ulteriore approssimazione del *risk capital* secondo l'impostazione YEE riguarda il calcolo approssimato del valore attuale degli impegni futuri attraverso un fattore φ (che si può intendere come un fattore di sconto globale) da applicare ai valori degli impegni non scontati e definito da:

$$\varphi := \frac{\sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \bar{Y}_{\tau}}{\bar{L}} = \frac{M_0}{\bar{L}}, \quad (4.30)$$

dove $\bar{L} := \sum_{\tau=1}^T \bar{Y}_{\tau}$ è la somma (non scontata) delle passività attese. Il fattore globale φ è la media ponderata dei fattori di sconto v_{τ} sullo scadenziario delle *liability*, con pesi \bar{Y}_{τ}/\bar{L} dati dal contributo percentuale di ciascuna *liability* alla somma totale. In questo senso φ cattura l'effetto globale dello sconto sugli importi attesi.

Si rappresenti con:

$$Z_1 := Y_1 + \sum_{\tau=2}^T \mathbf{E}_1(Y_{\tau}), \quad (4.31)$$

l'aspettativa di fine anno del valore non scontato del flusso delle *liability* Y . Essendo $\mathbf{E}_0(Z_1) = \bar{L}$, l'approssimazione YEE φ -scontata è definita ponendo:

$$\mathbf{W}_0(v_1 M_1^-) \approx \mathbf{W}_0(\varphi Z_1), \quad (4.32)$$

e quindi, dato che $M_0 = \varphi \bar{L}$, per K_0 si ha per definizione:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(\varphi Z_1) - \varphi \bar{L} - v_1 \gamma_1, \quad (4.33)$$

relazione che può anche essere espressa anche nella forma:

$$K_0 \approx \mathbf{U}_0(\varphi Z_1) - v_1 \gamma_1,$$

utilizzando la definizione di valore non anticipato.

a.2) Approssimazione YEE non scontata.

Nel caso in cui non si consideri lo sconto – e quindi si ha $v_{\tau} \equiv 1$ – l'espressione (4.28) diventa:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(Z_1) - \bar{L} - \gamma_1, \quad (4.34)$$

(e la (4.33) si riscrive nella forma $K_0 \approx \mathbf{U}_0(Z_1) - \gamma_1$), che ripropone l'esito dell'approccio tradizionale – undiscounted – diffusamente utilizzato nella pratica attuariale del calcolo della riserva dei rami danni.

Approssimazione basata sulla variabilità delle passività future

Per identificare la distribuzione di probabilità dell'aspettativa di fine anno M_1 del valore del flusso residuo delle *liability* $Y^{(1)}$ – richiesta nell'approssimazione YEE – è necessario un opportuno modello stocastico per le OLL.

Come si è già detto, molti dei modelli stocastici messi a punto per il calcolo delle riserve sinistri forniscono la distribuzione di probabilità delle *liability* future Y_τ a scadenza, ma non producono la distribuzione di probabilità delle corrispondenti aspettative al tempo $t = 1$. Per questo motivo è utile considerare altre approssimazioni.

b) L'approssimazione LM (*Liability-at-Maturity approximation*)

Si indichi con:

$$D := \sum_{\tau=1}^T v_\tau Y_\tau, \quad (4.35)$$

la variabile casuale che rappresenta la somma dei valori delle *liability* scontate. Ovviamente si ha $\mathbf{E}_0(D) = M_0$. L'approssimazione LM (*Liability-at-Maturity*) è definita ponendo:

$$\mathbf{W}_0(v_1 M_1^-) \approx \mathbf{W}_0(D). \quad (4.36)$$

Il *risk capital* corrispondente (LM-*approximated risk capital*) può essere scritto nella forma:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(D) - M_0 - v_1 \gamma_1, \quad (4.37)$$

o, in modo equivalente, nella forma:

$$K_0 \approx \mathbf{U}_0(D) - v_1 \gamma_1.$$

b.1) Approssimazione LM φ -scontata (φ -*discounted LM approximation*).

Si può avere una approssimazione φ -scontata utilizzando il già visto fattore di sconto globale $\varphi := M_0/\bar{L}$; si ponga cioè:

$$\mathbf{W}_0(D) \approx \mathbf{W}_0(\varphi L). \quad (4.38)$$

Ciò implica:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(\varphi L) - \varphi \bar{L} - v_1 \gamma_1. \quad (4.39)$$

ovvero:

$$K_0 \approx \mathbf{U}_0(\varphi L) - v_1 \gamma_1.$$

b.2) Approssimazione LM non scontata (*Undiscounted LM approximation*).

Nel caso di approssimazione non scontata si ha:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(L) - \bar{L} - \gamma_1, \quad (4.40)$$

ovvero, ovviamente, $K_0 \approx \mathbf{U}_0(L) - \gamma_1$.

c) Il caso piatto (*flat*): le approssimazioni YEE e LM

La maggior parte degli approcci tradizionali al calcolo delle riserve dei rami danni sono definiti nel mondo cosiddetto “flat”, senza considerare l’effetto dello sconto e il peso dei *risk margin*. In questo caso quindi si ha che il requisito di riserva è pari alla *best estimate* ($R_0^* = \bar{L}$), e le espressioni (4.34) e (4.40) si riducono rispettivamente alla:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(Z_1) - \bar{L} = \mathbf{U}_0(Z_1), \quad (4.41)$$

e alla:

$$K_0 \approx \mathbf{W}_0(L) - \bar{L} = \mathbf{U}_0(L). \quad (4.42)$$

4.3.7 Il problema della subadditività del *risk margin*

Nell’ipotesi FV, la riserva regolamentare al tempo 0 è data da $R_0^* = M_0 + \lambda_0$, ove λ_0 è:

$$\lambda_0 = \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \gamma_{\tau}; \quad (4.43)$$

cioè il *risk margin* è uguale ad una combinazione lineare dei singoli caricamenti γ_{τ} , con $\gamma_{\tau} = \bar{\bar{Y}}_{\tau} - \bar{Y}_{\tau}$. Questi ultimi, definendo $\bar{\bar{Y}}_{\tau} := \mathbf{E}_0^Q(Y_{\tau})$ come equivalente certo della passività Y_{τ} , sono dati dalla differenza $\gamma_{\tau} = \bar{\bar{Y}}_{\tau} - \bar{Y}_{\tau}$ tra l’equivalente certo della passività e il suo valore atteso.

L’assenza di un mercato delle passività danni impedisce, come già affermato, la definizione di un prezzo di mercato per la riserva, e conseguentemente la possibilità di stimare in modo non ambiguo i caricamenti per il rischio, per la cui identificazione è necessario ricorrere ad ipotesi più realistiche, accettando anche in questo caso delle approssimazioni.

La condizione descritta genera infatti due ordini di problemi:

- i caricamenti per il rischio – e quindi gli equivalenti certi – devono essere identificati sulla base di ipotesi realistiche, e comunque mediante approssimazioni;
- i caricamenti determinati su aspettative non *risk neutral* e il venir meno della proprietà di linearità dell’operatore prezzo determinano la subadditività dei *risk margin* ovvero la proprietà:

$$\lambda_0 \leq \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \gamma'_{\tau}. \quad (4.44)$$

Cioè il *risk margin* complessivo è inferiore alla somma (attualizzata) dei singoli *risk margin* γ'_{τ} , ove questi ultimi rappresentano dei *risk loading* singoli e non negativi definiti non in base alla aspettativa *risk neutral* ma in base a qualche specificato criterio.

La disuguaglianza (4.44) è ben nota nella teoria delle scelte di portafoglio, ove i *risk margin* sono definiti come funzioni σ -affini. Comunque la (4.44) è valida anche per definizioni di *risk margin* più generali, come sono quelle basate sui quantili o sull'*expected shortfall*. Inoltre, considerato che l'operatore aspettativa è additivo, la relazione precedente implica la subadditività anche rispetto agli equivalenti certi scontati:

$$\overline{D} \leq \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \overline{Y}'_{\tau}, \quad (4.45)$$

ove si indichi con \overline{Y}'_{τ} l'equivalente certo non determinato con aspettativa *risk neutral* della variabile Y_{τ} presa singolarmente, e sia $\overline{Y}'_{\tau} := \overline{Y}_{\tau} + \gamma'_{\tau}$. Sempre nella (4.45), con D si indica la variabile casuale – somma delle *liability* scontate – (4.35).

Il requisito di riserva $R_0^* := M_0 + \lambda_0$ si può allora interpretare come l'equivalente certo \overline{D} (da pagare al tempo 0) del valore D delle *liability* scontate.

Assume particolare importanza recuperare l'additività dei *risk margin*, in quanto effettuare il *discounting* di una riserva richiesta non scontata può ridursi semplicemente a scambiare i benefici della diversificazione con quelli di sconto. Ciò potrebbe anche condurre al risultato particolarmente sfavorevole di una R^* scontata maggiore di quella ante-sconto.

Al fine di recuperare l'additività potrebbero essere definiti criteri di "allocazione" dei *risk loading* γ_{τ} , che soddisfino la proprietà (4.43). Questi *risk loading* debbono essere ottenuti specificando un criterio che riallochi il rischio totale λ_0 rispetto alle singole componenti Y_{τ} . Dati i *risk loading* allocati, l'equivalente certo di Y_{τ} *nel portafoglio* è immediatamente definito come $\overline{Y}_{\tau} := \overline{Y}_{\tau} + \gamma_{\tau}$ e torna a valere la proprietà di linearità:

$$\overline{D} = \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \overline{Y}_{\tau}, \quad (4.46)$$

come nel caso di misura *risk-neutral*.

I modelli stocastici per le *liability* danni consentono di fornire valutazioni sia dei *risk loading* "stand-alone" γ'_{τ} sia del *risk margin* complessivo λ_0 . Quindi può essere calcolato il valore dell'equivalente certo \overline{D} ; e una misura della diversificazione si ottiene dalla differenza $\overline{D} - \sum \overline{Y}'_{\tau}$. Comunque i modelli attuariali tradizionali – ancora impiegati diffusamente – non forniscono l'allocazione dei *risk margin*, che vengono individuati soltanto sulla base di ipotesi addizionali o di definizioni *ad-hoc*.

Ad esempio, per *risk margin* σ -affini i *risk loading* allocati potrebbero essere definiti dalla contribuzione marginale della componente Y_{τ} al *risk margin* totale λ_0 . Questo approccio richiede la

specificazione della matrice di covarianza tra le *liability* delle diverse scadenze, che di solito viene ricavata dai modelli attuariali stocastici.

È rilevante il caso di equivalente certo definito come α -percentile. La disuguaglianza (4.45) si scrive allora nella forma:

$$\mathbf{Q}^{(\alpha)}(D) \leq \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \mathbf{Q}^{(\alpha)}(Y_{\tau}), \quad (4.47)$$

dove i quantili $\mathbf{Q}^{(\alpha)}(Y_{\tau})$ sono calcolati sulla distribuzione di probabilità delle singole *liability* Y_{τ} e il percentile complessivo $\mathbf{Q}^{(\alpha)}(D)$ è calcolato sulla distribuzione aggregata delle *liability* scontate. Gli equivalenti certi \bar{Y}_{τ} “nel portafoglio” possono essere definiti specificando le *quote di allocazione*:

$$\beta_{\tau} := \frac{\bar{Y}_{\tau}}{\mathbf{Q}^{(\alpha)}(D)},$$

che soddisfano la proprietà $\sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \beta_{\tau} = 1$. Quindi gli equivalenti certi allocati $\bar{Y}_{\tau} := \beta_{\tau} \mathbf{Q}^{(\alpha)}(D)$ soddisfano la (4.46) per costruzione; i corrispondenti *risk loading* allocati sono dati da:

$$\gamma_{\tau} := \beta_{\tau} \mathbf{Q}^{(\alpha)}(D) - \bar{Y}_{\tau}. \quad (4.48)$$

Per esempio le composizioni β_{τ} potrebbero essere fissate proporzionali alle *liability* attese:

$$\beta_{\tau} := \frac{\bar{Y}_{\tau}}{\sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \bar{Y}_{\tau}}, \quad (4.49)$$

o ai quantili delle singole *liability*:

$$\beta_{\tau} := \frac{\mathbf{Q}^{(\alpha)}(Y_{\tau})}{\sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \mathbf{Q}^{(\alpha)}(Y_{\tau})}. \quad (4.50)$$

Quest'ultima espressione è stata utilizzata per il calcolo dei valori riportati nelle tabelle 5.21, 5.22 e 5.23. Una definizione alternativa si può dare specificando β_{τ} come quota di allocazione *di covarianza*:

$$\beta_{\tau} := \frac{\sum_{\theta=1}^T v_{\tau} v_{\theta} \mathbf{Cov}(Y_{\tau}, Y_{\theta})}{\left[\sum_{k=1}^T \sum_{\theta=1}^T v_k v_{\theta} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_{\theta}) \right]^{1/2}}. \quad (4.51)$$

La definizione dei *risk loading* allocati è utile anche per calcolare *risk capital* di riserva approssimati, sulla linea definita nel paragrafo 4.3.5. Per esempio per i *risk margin* basati sui quantili l'approssimazione (4.28) fornisce, considerando la (4.48):

$$K_0 = v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0 - v_1 [\beta_1 \mathbf{Q}^{(\alpha)}(D) - \bar{Y}_1]. \quad (4.52)$$

4.4 Utilizzo del *risk capital* per definire il *risk margin*

Come già anticipato nel paragrafo (4.3.5), scelto il criterio per determinare il RAV, il *risk capital*, secondo i criteri *Solvency II* deve essere quantificato anno per anno e coperto in ciascun esercizio, sull'intero orizzonte di vita del portafoglio.

4.4.1 Il costo del *risk capital*

Se denominiamo K_τ ($\tau = 0, 1, \dots, T - 1$) il *risk capital* relativo all'anno (esercizio) che inizia al tempo τ , esso sarà al tempo 0 (e per $\tau > 0$) una variabile aleatoria. Sia:

$$\bar{K}_\tau := \mathbf{E}_0(K_\tau), \quad \tau = 0, 1, \dots, T - 1,$$

l'aspettativa in zero di K_τ . Ovviamente risulta $\bar{K}_0 = K_0$.

Con h_τ si rappresenti il rendimento (tasso di rendimento) richiesto dall'azionista nell'anno $[\tau, \tau + 1]$, cioè per immobilizzare il capitale di rischio nell'anno che inizia in τ ; e sia $i(\tau, \tau + 1)$ il tasso di interesse *risk-free* a un anno osservato sul mercato al tempo τ . Si definisce *costo del capitale* al tempo zero il valore:

$$\kappa_0 := \sum_{\tau=1}^T \mathcal{V}(0; c_\tau),$$

dove:

$$c_\tau := [h_\tau - i(\tau - 1, \tau)] \bar{K}_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \dots, T, \quad (4.53)$$

è il costo per interesse che l'assicuratore dovrà pagare all'azionista alla fine dell'anno τ (e $[h_\tau - i(\tau - 1, \tau)]$ è lo *spread* di rendimento che remunera il rischio imprenditoriale).

Di solito si assume $h_\tau \equiv h$ costante, e noto al tempo zero. Si può dimostrare che il principio di arbitraggio richiede che sia:

$$\mathcal{V}(0; c_\tau) = v_\tau [h - i(0, \tau - 1, \tau)] \bar{K}_{\tau-1}, \quad (4.54)$$

dove $i(0, \tau - 1, \tau)$ è il tasso a termine per l'anno τ (da $\tau - 1$ a τ) implicito nella struttura dei tassi di interesse in vigore nel mercato nell'istante di valutazione. Quindi risulta:

$$\kappa_0 := \sum_{\tau=1}^T [h - i(0, \tau - 1, \tau)] v_\tau \bar{K}_{\tau-1}. \quad (4.55)$$

È importante notare che questa proprietà vale anche in condizioni di incertezza.

Un'approssimazione tipica per κ_0 si ha assumendo una struttura dei tassi deterministica e piatta (*flat yield curve*), cioè ponendo:

$$i(\tau - 1, \tau) \equiv i_1, \quad (4.56)$$

dove i_1 è il tasso di interesse corrente *risk-free* a un anno. In questo caso risulta $\mathcal{V}(0; c_\tau) = v_\tau (h - i_1) \bar{K}_{\tau-1}$. In modo più significativo, anche in condizioni di incertezza sui tassi di interesse si può considerare uno *spread* costante¹⁵:

$$s := h_\tau - i(\tau - 1, \tau), \quad \tau = 1, 2, \dots, T.$$

¹⁵Nello Swiss Solvency Test si assume uno *spread* costante $h - i_1 = 6\%$.

Per cui si ha:

$$\kappa_0 = s \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \bar{K}_{\tau-1}. \quad (4.57)$$

4.4.2 L'ipotesi “ongoing”

In molti casi non è facile rappresentare in modo soddisfacente le aspettative \bar{K}_{τ} dei *risk capital* futuri. Inoltre, nell'ipotesi di *run-off* del portafoglio, il valore delle prestazioni $V_{\tau+1}^-$ decresce con τ ma può avere una variabilità relativa crescente, e quindi indurre una valutazione del *risk capital* non-realistica.

Se effettivamente il portafoglio non è in *run-off*, e si può realisticamente assumere che il business continui con un andamento “stabile” – com'è in genere nei casi pratici –, allora è ragionevole sostituire le aspettative \bar{K}_{τ} per $\tau > 0$, nelle equazioni (4.53) e (4.55), con:

$$\widehat{K}_{\tau} := q \widehat{M}_{\tau}, \quad (4.58)$$

dove:

$$q := \frac{K_0}{M_0},$$

e:

$$\widehat{M}_{\tau} := \sum_{\theta=\tau+1}^T v(0, \tau, \theta) \mathbf{E}_0(Y_{\theta}) = \frac{1}{v_{\tau}} \sum_{\theta=\tau+1}^T v_{\theta} \bar{Y}_{\theta}.$$

Questa espressione fornisce una valutazione “ongoing” dei *risk capital* futuri basata sull'ipotesi che in ciascun anno sia costante la proporzione q tra K_{τ} e l'aspettativa della corrispondente riserva residua. La definizione vale anche per $\tau = 0$, ovviamente assumendo $\widehat{M}_0 = M_0$.

Con l'*ongoing assumption* (4.58) sui *risk capital* futuri e considerando uno *spread* s costante, il costo per interessi al tempo τ è dato da:

$$c_{\tau} = s q \widehat{M}_{\tau-1} = \frac{s q}{v_{\tau-1}} \sum_{\theta=\tau}^T v_{\theta} \bar{Y}_{\theta}, \quad \tau = 1, 2, \dots, T, \quad (4.59)$$

e l'espressione (4.57) si semplifica nella forma:

$$\kappa_0 = \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} c_{\tau} = s q \sum_{\tau=1}^T \frac{v_{\tau}}{v_{\tau-1}} \sum_{\theta=\tau}^T v_{\theta} \bar{Y}_{\theta}. \quad (4.60)$$

4.4.3 Il *risk margin* come costo del *risk capital*

Il costo del *risk capital* di riserva dato dalla (4.60) può essere utilizzato per determinare i *risk margin* se questi “premi per il rischio” non sono “misurabili” (osservabili) direttamente, poiché il business si svolge in un mercato non completamente efficiente¹⁶. Poiché κ_0 può essere interpretato come

¹⁶Il costo del *risk capital* come regola generale per determinare i *risk margin* da aggiungere alla *best estimate* del valore delle *liability* – e quindi arrivare alla determinazione del *fair value* di riserva – è stato proposto anche in Moriconi 2005 [17]. Questa definizione sembra analoga alla definizione di *market value margin* delle *liability* utilizzata nello Swiss Solvency Test ([12], [13], [15]).

un premio per il rischio “market consistent” relativo al flusso Y delle *liability* in-essere, si potrebbe assumere questa quantità come *market value margin* per definire il requisito di riserva; cioè:

$$\lambda_0 = \kappa_0; \quad (4.61)$$

considerando la (4.43) e la (4.60), per i *risk loading* deve valere la relazione:

$$\gamma_\tau = c_\tau = s q \widehat{M}_{\tau-1}.$$

Naturalmente la definizione di *risk capital* K_0 e la definizione di *risk margin* devono essere tra loro coerenti. Per la (4.61) il *risk loading* di primo anno è dato da:

$$\gamma_1 = c_1 = s K_0;$$

4.4.4 Il costo del capitale secondo il *risk capital* calcolato con le approssimazioni YEE e LM

a) Approssimazione YEE

Se si considera il *risk capital* K_0 nella forma data dall'approssimazione YEE (4.28), tenuto conto dell'espressione precedente per il *risk loading* di primo anno, si avrà:

$$K_0 = v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0 - v_1 s K_0,$$

e quindi:

$$K_0 = \frac{v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0}{1 + v_1 s} = \frac{\mathbf{U}_0(v_1 M_1^-)}{1 + v_1 s}. \quad (4.62)$$

Nell'ipotesi (4.61) è perciò equivalente sottrarre $v_1 \gamma_1$ dal valore non anticipato dell'aspettativa scontata di fine anno M_1^- , o dividere M_1^- per $(1 + v_1 s)$.

Ne consegue che il market value margin può essere rappresentato nella forma:

$$\lambda_0 = \frac{s}{1 + v_1 s} \frac{v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0}{M_0} \sum_{\tau=1}^T \frac{v_\tau}{v_{\tau-1}} \sum_{\theta=\tau}^T v_\theta \bar{Y}_\theta. \quad (4.63)$$

Questa relazione consente di rappresentare il *risk margin* come prodotto di tre fattori:

$$\lambda_0 = \widehat{s} \widehat{u} \widehat{\mu}, \quad (4.64)$$

dove:

- il “fattore di *spread*” (*spread factor*):

$$\widehat{s} := \frac{s}{1 + v_1 s} = s \frac{1 + i_1}{1 + i_1 + s},$$

che numericamente coincide sostanzialmente con s , fornisce una stima globale del premio al rischio (espresso come *excess return*) che il mercato attribuisce agli investimenti sulla specifica linea di affari;

- il “fattore u ” (u factor):

$$\widehat{u} := \frac{\mathbf{U}_0(M_1^-)}{\mathbf{E}_0(M_1^-)} = \frac{v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0}{M_0},$$

fornisce il valore relativo non anticipato (ovvero il valore non anticipato in percentuale del valore anticipato) dell’aspettativa di fine anno degli impegni residui. Rappresenta quindi la variabilità intrinseca del flusso di *liability* Y , essendo la misura di variabilità definita sulla base del livello di sicurezza fissato dalla specificazione del RAV;

- il “fattore di *liability*”:

$$\widehat{\mu} := \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \widehat{M}_{\tau-1},$$

è un ammontare monetario che cattura la struttura temporale delle *liability* attese, data la struttura corrente dei tassi di interesse.

Una volta calcolato il RAV $\mathbf{W}_0(M_1^-)$, le espressioni (4.62) e (4.63) richiedono la sola specificazione delle *liability* attese e della struttura dei tassi *risk-free* di mercato. Il livello dello *spread* s non ha grande effetto sulla determinazione di del *risk capital*, ma ha rilevanza strategica nella quantificazione del *risk margin* e quindi della riserva regolamentare R_0^* .

a.1) approssimazione YEE φ -scontata

Se si adotta l’approssimazione YEE φ -scontata, l’espressione (4.33) fornisce:

$$K_0 = \frac{\mathbf{W}_0(\varphi Z_1) - \varphi \bar{L}}{1 + v_1 s} = \frac{\varphi \mathbf{U}_0(Z_1)}{1 + v_1 s}, \quad (4.65)$$

e:

$$\lambda_0 = \frac{s}{1 + v_1 s} \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \widehat{M}_{\tau-1}. \quad (4.66)$$

a.2) approssimazione YEE non scontata

Con l’approssimazione YEE non scontata (4.34) si ha:

$$K_0 = \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{1 + s}. \quad (4.67)$$

Se si pongono a 1 tutti i fattori di sconto anche nelle aspettative scontate \widehat{M}_{τ} si ottiene inoltre:

$$\lambda_0 = \frac{s}{1 + s} \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_{\theta}. \quad (4.68)$$

b) approssimazione LM

Per l'approssimazione LM scontata (4.37):

$$K_0 = \frac{U_0(D)}{1 + v_1 s} \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{s}{1 + v_1 s} \frac{U_0(D)}{M_0} \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \widehat{M}_{\tau-1}. \quad (4.69)$$

b.1) approssimazione LM φ -scontata

Per l'approssimazione LM φ -scontata:

$$K_0 = \frac{\varphi U_0(L)}{1 + v_1 s} \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{s}{1 + v_1 s} \frac{U_0(L)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T v_{\tau} \widehat{M}_{\tau-1}. \quad (4.70)$$

b.2) approssimazione LM non scontata

$$K_0 = \frac{U_0(L)}{1 + s} \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{s}{1 + s} \frac{U_0(L)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_{\theta}. \quad (4.71)$$

c) il caso piatto (*flat*): le approssimazioni YEE e LM

Nell'approssimazione YEE, ponendo $\gamma_1 = 0$, che equivale a eliminare la divisione per $1 + s$ nella (4.68), si ottiene:

$$\lambda_0 = s \frac{U_0(Z_1)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_{\theta}. \quad (4.72)$$

L'approssimazione LM nel caso piatto fornisce:

$$K_0 = U_0(L) \quad \text{e} \quad \lambda_0 = s \frac{U_0(L)}{\bar{L}} \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_{\theta}. \quad (4.73)$$

4.4.5 Tavola sintetica dei diversi approcci e approssimazioni

Può essere utile sintetizzare in forma di tabella i diversi metodi di calcolo del *risk margin* e del *risk capital* considerati.

Nella tavola 4.1 sono riportati in forma schematica i tre approcci fondamentali usati per la definizione di riserva regolamentare, dove i *risk margin* sono determinati unicamente considerando la distribuzione di probabilità della “variabile aleatoria rilevante” (*relevant random variable*, rrv), cioè la v.a. scelta per rappresentare le OLL. Ci si riferisce qui al caso di riserva regolamentare definita come percentile, ma la rappresentazione resta valida per una definizione di riserva basata su un arbitrario riassunto esaustivo della rrv L o D .

Nella tavola 4.2 sono schematizzate le quattro possibili approssimazioni nel calcolo del *reserve risk capital*, sia con l'approccio YEE che con l'approccio LM. In questo caso si è ipotizzato che il

risk margin λ_0 nella riserva regolamentare, o almeno il *risk loading* γ_1 della *liability* Y_1 , sia già stato definito. Quindi il termine di “U-correction”, cioè il termine correttivo del valore non anticipato U_0 della rrv, è stato specificato indipendentemente dalla valutazione del *risk capital*.

Nella tavola 4.3, infine, sono rappresentati gli stessi approcci di calcolo ipotizzando però che il *reserve risk capital* e il *risk margin* siano determinati simultaneamente, il *risk margin* λ_0 essendo definito come il costo κ_0 del *risk capital*.

Con tutti i metodi considerati, una volta scelta la rrv restano da specificare solamente il RAV W_0 e lo *spread* s . Il RAV fornisce il valore non anticipato della rrv; lo *spread* (che esprime il prezzo di mercato del rischio) determina il termine di correzione (in questo caso un divisore) per la determinazione del *risk capital*. Il *risk margin* corrispondente è ricavato dal prodotto dei fattori s , u and μ , secondo la rappresentazione (4.64). Il fattore di *liability* $\hat{\mu}$ è ricavato come valore atteso delle *liability* scontato o non scontato, a seconda dell'approssimazione adottata.

Tabella 4.1. Definizione di Riserva regolamentare e di *risk margin*: metodo esatto e approssimazioni (R^* come percentile)

metodo scontato	rrv	D
	BE	$\mathbf{E}_0(D) = M_0$
	RR	$R^* = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D)$
	RM	$\lambda_0 = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D) - M_0$
approssimazione φ -scontata	rrv	φL
	BE	$\varphi \mathbf{E}_0(L) = \varphi \bar{L} = M_0$
	RR	$R^* = \varphi \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L)$
	RM	$\lambda_0 = \varphi \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L) - M_0$
approssimazione non scontata	rrv	L
	BE	$\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$
	RR	$R^* = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L)$
	RM	$\lambda_0 = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L) - \bar{L}$

rrv: *relevant random variable*
 BE: *best estimate*
 RR: *required reserve*
 RM: *risk margin*

Tabella 4.2. Metodi di valutazione del *risk capital* con l'approccio YEE e LM: si definisce il RAV (il *risk loading* γ_1 è già assegnato)

Metodo		YEE	LM
scontato	rrv	$v_1 M_1^-$	D
	RAV	$v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-)$	$\mathbf{W}_0(D)$
	BE	$v_1 \mathbf{E}_0(M_1^-) = M_0$	$\mathbf{E}_0(D) = M_0$
	U-corr.	$-v_1 \gamma_1$	$-v_1 \gamma_1$
	RC	$v_1 \mathbf{U}_0(M_1^-) - v_1 \gamma_1$	$\mathbf{U}_0(D) - v_1 \gamma_1$
φ -scontato	rrv	φZ_1	φL
	RAV	$\varphi \mathbf{W}_0(Z_1)$	$\varphi \mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\varphi \mathbf{E}_0(Z_1) = M_0$	$\varphi \mathbf{E}_0(L) = \varphi \bar{L} = M_0$
	U-corr.	$-v_1 \gamma_1$	$-v_1 \gamma_1$
	RC	$\varphi \mathbf{U}_0(Z_1) - v_1 \gamma_1$	$\varphi \mathbf{U}_0(L) - v_1 \gamma_1$
non scontato	rrv	Z_1	L
	RAV	$\mathbf{W}_0(Z_1)$	$\mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\mathbf{E}_0(Z_1) = \bar{L}$	$\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$
	U-corr.	$-\gamma_1$	$-\gamma_1$
	RC	$\mathbf{U}_0(Z_1) - \gamma_1$	$\mathbf{U}_0(L) - \gamma_1$
piatto	rrv	Z_1	L
	RAV	$\mathbf{W}_0(Z_1)$	$\mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\mathbf{E}_0(Z_1) = \bar{L}$	$\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$
	U-corr.	0	0
	RC	$\mathbf{U}_0(Z_1)$	$\mathbf{U}_0(L)$

Tabella 4.3. Metodi di valutazione del *risk margin* e del *risk capital* con l'approccio YEE e LM (si definisce il RAV e si assegna lo *spread*)

Metodo		YEE	LM
scontato	rrv	$v_1 M_1^-$	D
	RAV	$v_1 \mathbf{W}_0(M_1^-)$	$\mathbf{W}_0(D)$
	BE	$v_1 \mathbf{E}_0(M_1^-) = M_0$	$\mathbf{E}_0(D) = M_0$
	U-corr.	$/(1 + v_1 s)$	$/(1 + v_1 s)$
	RC	$v_1 \mathbf{U}_0(M_1^-)/(1 + v_1 s)$	$\mathbf{U}_0(D)/(1 + v_1 s)$
	<i>s</i> -factor	$\hat{s} = s/(1 + v_1 s)$	$\hat{s} = s/(1 + v_1 s)$
	μ -factor	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \widehat{M}_{\tau-1}$	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \widehat{M}_{\tau-1}$
	RM	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(M_1^-)}{\mathbf{E}_0(M_1^-)} \hat{\mu}$	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(D)}{\mathbf{E}_0(D)} \hat{\mu}$
φ -scontato	rrv	φZ_1	φL
	RAV	$\varphi \mathbf{W}_0(Z_1)$	$\varphi \mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\varphi \mathbf{E}_0(Z_1) = M_0$	$\varphi \mathbf{E}_0(L) = \varphi \bar{L} = M_0$
	U-corr.	$/(1 + v_1 s)$	$/(1 + v_1 s)$
	RC	$\varphi \mathbf{U}_0(Z_1)/(1 + v_1 s)$	$\varphi \mathbf{U}_0(L)/(1 + v_1 s)$
	<i>s</i> -factor	$\hat{s} = s/(1 + v_1 s)$	$\hat{s} = s/(1 + v_1 s)$
	μ -factor	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \widehat{M}_{\tau-1}$	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T v_\tau \widehat{M}_{\tau-1}$
	RM	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{\mathbf{E}_0(Z_1)} \hat{\mu}$	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(L)}{\mathbf{E}_0(L)} \hat{\mu}$
non scontato	rrv	Z_1	L
	RAV	$\mathbf{W}_0(Z_1)$	$\mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\mathbf{E}_0(Z_1) = \bar{L}$	$\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$
	U-corr.	$/(1 + s)$	$/(1 + s)$
	RC	$\mathbf{U}_0(Z_1)/(1 + s)$	$\mathbf{U}_0(L)/(1 + s)$
	<i>s</i> -factor	$\hat{s} = s/(1 + s)$	$\hat{s} = s/(1 + s)$
	μ -factor	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_\theta$	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_\theta$
	RM	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{\mathbf{E}_0(Z_1)} \hat{\mu}$	$\kappa_0 = \hat{s} \frac{\mathbf{U}_0(L)}{\mathbf{E}_0(L)} \hat{\mu}$
piatto	rrv	Z_1	L
	RAV	$\mathbf{W}_0(Z_1)$	$\mathbf{W}_0(L)$
	BE	$\mathbf{E}_0(Z_1) = \bar{L}$	$\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$
	U-corr.	$/1$	$/1$
	RC	$\mathbf{U}_0(Z_1)$	$\mathbf{U}_0(L)$
	<i>s</i> -factor	$\hat{s} = s$	$\hat{s} = s$
	μ -factor	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_\theta$	$\hat{\mu} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{\theta=\tau}^T \bar{Y}_\theta$
	RM	$\kappa_0 = s \frac{\mathbf{U}_0(Z_1)}{\mathbf{E}_0(Z_1)} \hat{\mu}$	$\kappa_0 = s \frac{\mathbf{U}_0(L)}{\mathbf{E}_0(L)} \hat{\mu}$

CAPITOLO 5. ANALISI DELLE RISERVE SINISTRI DEL COMPARTO AUTO ITALIANO

5.1 Applicazione ai dati reali del comparto auto italiano

Le metodologie stocastiche ODP (con *bootstrapping*) e Mack sono state applicate alle serie storiche degli importi dei pagamenti per sinistri osservate alla data del 31 dicembre 2004 per i rami “R.C. Auto” (RCA) e “Corpi di veicoli terrestri” (CVT). I dati, relativi agli anni 1995-2004 per il ramo RCA e agli anni 1998-2004 per il ramo CVT, sono stati organizzati secondo il classico schema triangolare *run-off* (anno di avvenimento-anno di anzianità).

È stata quindi effettuata una verifica di compatibilità per le riserve sinistri, rispetto ad alcuni *benchmark* proposti da *Solvency II*. Per garantire un confronto coerente sono state considerate le riserve di bilancio delle sole generazioni corrispondenti ai triangoli *run-off* utilizzati per la stima dei *benchmark*; precisamente, sono state prese come riferimento:

ramo Responsabilità civile auto (RCA)

- le riserve sinistri individuali iscritte nel bilancio 2004 (per le generazioni 1996-2004) da un campione selezionato di 40 imprese, pari complessivamente a 24.042 milioni di Euro;
- le riserve sinistri del 2004 (per le generazioni 1996-2004) del mercato italiano suddiviso in quattro fasce sulla base dell'ammontare delle riserve iscritte in bilancio (complessivamente 75 imprese, per una riserva totale pari a 25.717 milioni di Euro)¹;

ramo Corpi di veicoli terrestri (CVT)

- le riserve sinistri del 2004 del ramo (per le generazioni 1999-2004), suddiviso in quattro fasce includenti le medesime imprese del ramo RCA, per una riserva totale di 691 milioni di Euro.

Modalità di applicazione dei metodi

Scelta del tail factor

Sia per il ramo RCA che per il ramo CVT si è riscontrato che la generazione sinistri più vecchia a riserva non risultava esaurita alla fine del 2004, essendo ancora presente una riserva sinistri residua. Per il trattamento di tale “coda” dello sviluppo è stata utilizzata l'ipotesi della “coda statistica”; ovvero la riserva della generazione più vecchia considerata (1995 per l'RCA e 1998 per il CVT) è stata sommata ai pagamenti effettuati dall'impresa nell'esercizio 2004.

¹Sia nel campione selezionato che nel campione esteso le riserve considerate ammontavano al 95% circa delle corrispondenti riserve relative a tutte le generazioni.

Inflazione di ramo

I metodi stocastici sono stati applicati:

- a. ai pagamenti per sinistri espressi in moneta storica, ipotizzando implicitamente che il trend dell'inflazione caratteristica del ramo riscontrato nel passato potesse ripetersi identicamente nel futuro;
- b. ai pagamenti per sinistri espressi in moneta corrente (cioè al 31.12.2004), deflazionati secondo un trend inflattivo opportunamente stimato per il passato. In questo caso si è ovviamente formulata una ipotesi inflattiva per i futuri pagamenti.

Le elaborazioni sub b. sono state effettuate solamente per il campione di imprese considerato per il ramo RCA

Benchmark di riserva

Sulla base delle risultanze dei metodi stocastici sono stati determinati i seguenti *benchmark* di riserva:

Riserve a costo ultimo (non scontate)

- a) *risk margin* dal percentile:

variabile casuale rilevante L , *best estimate* $\mathbf{E}_0(L) = \bar{L}$, riserva richiesta $R^* = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L)$, *risk margin* come differenza $\mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(L) - \mathbf{E}_0(L)$ (cfr. cap. 4, par. 4.4.5, tav. 4.1, approssimazione non scontata). Requisiti di riserva calcolati per il 75-esimo e il 90-esimo percentile.

- b) *risk margin* come costo del capitale:

variabile casuale rilevante Z_1 , *risk capital* determinato con l'approccio YEE, RAV $W(Z_1)$ come percentile al 99,5% e corrispondente costo del capitale κ con *spread* al 6% (cfr. cap. 4, par. 4.4.5, tav. 4.3, metodo YEE-undiscounted).

Riserve scontate

- c) *risk margin* dal percentile:

variabile casuale rilevante D , *best estimate* $M_0 = \mathbf{E}_0(D)$, $R^* = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D)$, *risk margin* come differenza $\mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D) - \mathbf{E}_0(D)$ (cfr. cap. 4, par. 4.4.5, tav. 4.1, metodo esatto scontato). Requisiti di riserva calcolati per il 75-esimo e il 90-esimo percentile.

- d) *risk margin* come costo del capitale:

variabile casuale rilevante M_1^- , *risk capital* determinato con l'approccio YEE, RAV $\mathbf{W}_0(M_1^-)$ come percentile al 99,5% e costo del capitale κ con *spread* al 6% (cfr. cap. 4, par. 4.4.5, tav. 4.3, metodo YEE-discounted).

Per effettuare lo sconto sono stati impiegati i tassi di interesse *risk-free* in vigore sul mercato italiano alla data del 31.12.2004, riportati nella tabella 5.1.

Tabella 5.1. Fattori di sconto e tassi *risk-free* al 31.12.2004

τ	v_τ	i_τ
1	0,9777	2,28%
2	0,9507	2,56%
3	0,9204	2,80%
4	0,8879	3,02%
5	0,8542	3,20%
6	0,8200	3,36%
7	0,7857	3,50%
8	0,7519	3,63%
9	0,7187	3,74%

Nel caso c) sono anche stati calcolati i quantili scontati approssimati $Q_v^{(\alpha)}(L) = \varphi Q_0^{(\alpha)}(L)$ utilizzando la funzione di sconto globale $\varphi = M_0/L$ (approssimazione φ -scontata della tav. 4.1).

Nei casi b) e d) relativi al *risk margin* come costo del capitale, sono stati considerati anche, per confronto, *risk capital* definiti come percentile al 99,9%, analogamente a quanto fatto nel *framework* di *Basilea II*.

Le statistiche di interesse delle variabili aleatorie rilevanti L , D , Z_1 e M_1^- sono state ricavate applicando ai triangoli dei pagamenti sia il modello ODP che il DFCL di Mack. Per il modello ODP sono state ricavate le distribuzioni di probabilità complete delle variabili rilevanti utilizzando il *bootstrap* simulato. Nel caso del modello di Mack i quantili sono stati calcolati ipotizzando una distribuzione lognormale con media e varianza uguale a quelle prodotte dal modello. Nella sua formulazione, il modello DFCL fornisce gli errori di previsione solo nel caso delle riserve non scontate con riferimento alle le riserve per singola generazione sinistri e per quella complessiva. Quindi questo modello è stato applicato limitatamente al caso a) e al caso c) con l'approssimazione φ .

Sulla base del campione di imprese RCA, sono state anche determinate le misure dei *benchmark* di riserva e del *risk capital* secondo gli approcci YEE e LM presentati al cap. 4, al fine di apprezzare il grado di approssimazione tra le due impostazioni. Le elaborazioni sono state effettuate in questo caso esclusivamente con il metodo stocastico ODP Poisson.

5.2 Applicazione ai dati storici dei pagamenti. Riserve a costo ultimo

Il campione originariamente considerato era composto da 55 imprese, corrispondenti al 98% del totale complessivo delle riserve sinistri del mercato RCA 2004.

Una analisi di alcuni risultati preliminari ha consigliato di non considerare nello studio alcune im-

prese che evidenziavano caratteristiche tali da non rendere correttamente applicabili le metodologie a disposizione. In particolare non sono state considerate:

- le imprese che presentavano serie storiche di pagamenti troppo brevi;
- le imprese autorizzate da pochi anni e dunque con evidenti incrementi nelle serie storiche dei pagamenti;
- le imprese con errori nei dati.

Tale "cleaning" ha condotto alla eliminazione dal campione originario di 15 unità, riducendo a 40 il numero delle imprese analizzate, rappresentative ancora del 93% circa delle riserve del mercato RCA 2004.

5.2.1 Raffronto tra i risultati delle due metodologie stocastiche

Ai dati delle 40 imprese sono state dunque applicate le metodologie ODP con *bootstrapping* e DF-CL di Mack. Nelle simulazioni ODP sono state effettuate, per ciascuna impresa, 10.000 iterazioni Monte Carlo, in modo tale da fornire una distribuzione empirica delle perdite per pagamenti sinistri sufficientemente ricca anche nelle code.

Dato che le due metodologie sono costruite come estensioni stocastiche del *chain-ladder* deterministico, esse dovrebbero fornire identici valori medi \bar{L} . Tuttavia, dato che il modello ODP è applicato con metodo Monte Carlo, tutti i valori simulati con questo metodo risultano necessariamente affetti da un errore casuale (errore Monte Carlo). In particolare, la media campionaria \tilde{L} ricavata dalla distribuzione delle OLL totali differisce leggermente dal valore esatto \bar{L} dato dal *chain-ladder*. Nel campione delle 40 imprese, il valore medio dell'errore percentuale $(\tilde{L} - \bar{L})/\bar{L}$ sulle 10.000 iterazioni è risultato pari allo 0,13%, con un valore minimo di -0,99% e massimo di 0,99%. Per agevolare il confronto tra i risultati ottenuti con le due metodologie, tutti i valori delle OLL prodotti dall'ODP per simulazione (scontati e non scontati) sono stati "compensati per l'errore Monte Carlo", sottraendo il valore dello scostamento $(\tilde{L} - \bar{L})$; naturalmente l'aggiustamento applicato a \tilde{L} produce una media campionaria di L uguale alla media *chain-ladder* \bar{L} , per costruzione.

Nelle valutazioni prodotte con le due metodologie il valore teorico \bar{L} è stato di solito usato come livello di riferimento: tutti gli ammontari relativi a imprese singole sono stati espressi in percentuale del valore di \bar{L} specifico dell'impresa.

Sulla base dei risultati ottenuti, sono stati determinati i *benchmark* di riserva di modello, che sono stati messi a confronto (sia per le singole imprese che per il mercato suddiviso in fasce secondo le classi di importo a riserva) con le riserve sinistri effettivamente iscritte nel bilancio 2004.

Ai fini di un raffronto tra le due metodologie, nella tabella 5.2 sono stati riportati, per singola impresa, i valori del 75-esimo percentile, del 90-esimo e del coefficiente di variazione (incidenza della deviazione standard sul valor medio) ottenuti con la metodologia ODP e DFCL, espressi come

percentuale della *best estimate*; sono inoltre riportate le differenze percentuali tra i valori DFCL e i corrispondenti valori ODP.

Sotto il profilo metodologico, dai risultati emerge che:

- coerentemente con le proprietà teoriche dei modelli ODP e DFCL, le due versioni stocastiche del *chain-ladder* conducono essenzialmente al medesimo valore di *best estimate*, le leggere differenze numeriche essendo imputabili all'errore campionario delle simulazioni ODP; appaiono invece sensibilmente differenziati i valori relativi al 75-esimo percentile;
- per 37 delle 40 imprese del campione il *benchmark* di riserva al 75-esimo percentile per il DFCL è inferiore al corrispondente valore prodotto dall'ODP. Le imprese sono ordinate per valori crescenti del coefficiente di variazione prodotto dall'ODP.

Quest'ultimo aspetto, unitamente all'analisi dei valori dei coefficienti di variazione, evidenzia che la metodologia DFCL conduce a distribuzioni di probabilità maggiormente concentrate rispetto alla metodologia ODP². Pertanto i requisiti di riserva determinati con la metodologia DFCL (con ipotesi di lognormalità) risultano meno prudentziali di quelli calcolati con la metodologia ODP.

5.2.2 I risk margin e la loro incidenza sulla best estimate

Il *risk margin*, componente addizionale della *best estimate* esprime il livello di prudenza della riserva sinistri, è stato determinato sia come differenza tra un prefinito percentile e la *best estimate*, sia secondo il criterio del costo del capitale, avendo ricavato il *risk capital* dal percentile al 99,5% e con uno *spread* pari al 6%. Si ricorda che, in quest'ultimo caso, il *risk capital* è stato determinato mediante l'approssimazione YEE non scontata, riportata alla tav. 4.3 del paragrafo 4.4.5.

Nella successiva tabella 5.3 sono stati riportati, per ogni impresa del campione, le incidenze percentuali dei diversi *risk margin* sulle rispettive *best estimate*. Anche in questo caso le imprese sono ordinate per valori crescenti del coefficiente di variazione dell'ODP.

Dall'analisi dei dati emerge, in generale, che:

- complessivamente, il campione delle 40 imprese ha fatto registrare per l'incidenza del *risk margin* sulla *best estimate* un valore medio (ponderato con le riserve) pari al 4,68% in corrispondenza del 75-esimo percentile, al 9,52% nel caso del 90-esimo, ed al 3,96% nel caso del costo del capitale (CoC).

Si evidenzia pertanto che:

- il criterio del costo del capitale e quello del percentile al livello del 75% conducono, in media, a valori di mercato non molto dissimili, in percentuale della *best estimate* (con una lieve prevalenza del *risk margin* ottenuto dal percentile).

²Tale risultato è confermato sul piano operativo anche nel calcolo della riserva con *discounting* eseguito per l'intero mercato. Nel seguito dello studio sono stati riportati esclusivamente i dati relativi al modello ODP, salvo dove diversamente precisato.

Tabella 5.2. Percentili e coefficienti di variazione nel modello ODP e nel modello DFCL

n	75° percentile			90° percentile			coefficiente di variazione		
	ODP (% BE)	DFCL (% BE)	Δ (%)	ODP (% BE)	DFCL (% BE)	Δ (%)	ODP (% BE)	DFCL (% BE)	Δ (%)
1	102,37	101,73	-0,63	104,52	103,34	-1,13	3,51	2,59	-26,22
2	103,05	102,65	-0,39	105,81	105,17	-0,61	4,53	4,00	-11,80
3	103,18	102,82	-0,35	106,03	105,51	-0,48	4,70	4,26	-9,29
4	103,05	102,45	-0,59	106,26	104,76	-1,41	4,77	3,68	-22,68
5	103,28	102,26	-0,99	106,36	104,39	-1,85	4,87	3,40	-30,24
6	103,41	102,30	-1,08	106,74	104,47	-2,13	5,08	3,46	-31,86
7	103,40	102,65	-0,73	106,71	105,17	-1,44	5,19	3,99	-23,06
8	103,95	103,11	-0,81	107,80	106,09	-1,58	6,10	4,70	-22,90
9	104,11	103,27	-0,80	107,94	106,42	-1,41	6,22	4,96	-20,33
10	104,28	103,13	-1,10	108,36	106,15	-2,04	6,50	4,74	-26,99
11	104,18	102,88	-1,24	109,08	105,64	-3,16	6,82	4,36	-36,10
12	104,67	103,71	-0,93	109,18	107,31	-1,71	6,97	5,63	-19,20
13	104,90	103,74	-1,10	109,74	107,39	-2,14	7,35	5,69	-22,59
14	105,09	103,17	-1,82	109,86	106,23	-3,31	7,59	4,81	-36,71
15	105,25	103,81	-1,37	109,82	107,52	-2,09	7,64	5,79	-24,21
16	105,10	103,95	-1,09	109,79	107,82	-1,80	7,66	6,02	-21,38
17	104,95	105,51	0,53	110,24	111,08	0,77	7,75	8,50	9,64
18	105,28	103,54	-1,66	110,33	106,97	-3,05	8,04	5,37	-33,20
19	105,62	103,67	-1,84	111,73	107,24	-4,02	8,85	5,58	-36,96
20	106,12	103,65	-2,32	112,22	107,20	-4,47	9,34	5,55	-40,52
21	105,88	103,85	-1,91	112,45	107,61	-4,31	9,42	5,86	-37,77
22	106,12	104,07	-1,94	112,30	108,05	-3,78	9,56	6,20	-35,16
23	106,60	104,74	-1,75	112,86	109,46	-3,01	9,87	7,27	-26,30
24	106,50	105,33	-1,09	113,25	110,71	-2,24	10,03	8,21	-18,14
25	106,26	104,19	-1,96	113,39	108,30	-4,49	10,14	6,39	-37,04
26	106,88	106,15	-0,68	114,20	112,48	-1,51	10,71	9,55	-10,83
27	106,96	105,93	-0,96	113,99	112,00	-1,75	10,89	9,19	-15,63
28	107,24	106,21	-0,96	115,31	112,60	-2,35	11,69	9,64	-17,53
29	107,50	104,37	-2,91	114,88	108,68	-5,40	11,77	6,67	-43,30
30	107,74	106,32	-1,31	115,62	112,84	-2,40	12,07	9,83	-18,61
31	107,41	104,87	-2,37	115,54	109,73	-5,04	12,36	7,47	-39,59
32	108,67	104,96	-3,41	117,03	109,93	-6,07	12,94	7,62	-41,08
33	109,17	105,03	-3,79	118,48	110,08	-7,09	14,34	7,74	-46,04
34	108,75	105,49	-2,99	119,47	111,05	-7,05	14,37	8,47	-41,04
35	109,06	108,77	-0,26	118,02	118,35	0,29	14,98	13,97	-6,74
36	109,88	110,33	0,41	119,83	122,03	1,84	15,34	16,73	9,10
37	110,25	112,04	1,62	120,85	126,31	4,52	15,90	19,94	25,45
38	112,10	107,84	-3,80	125,44	116,21	-7,36	19,25	12,36	-35,79
39	111,91	106,41	-4,92	126,71	113,02	-10,80	20,18	9,96	-50,63
40	114,97	106,83	-7,08	132,41	113,94	-13,95	24,17	10,66	-55,91

Tabella 5.3. Modello ODP: *risk margin* come quantili e come costo del capitale

	75° percentile	90° percentile	Cost of Capital
<i>n</i>	RM (% BE)	RM (% BE)	RM (% BE)
1	2,37	4,52	1,67
2	3,05	5,81	2,02
3	3,18	6,03	2,18
4	3,05	6,26	2,40
5	3,28	6,36	2,04
6	3,41	6,74	2,79
7	3,40	6,71	2,73
8	3,95	7,80	2,67
9	4,11	7,94	3,12
10	4,28	8,36	3,12
11	4,18	9,08	3,83
12	4,67	9,18	2,84
13	4,90	9,74	3,91
14	5,09	9,86	4,03
15	5,25	9,82	3,21
16	5,10	9,79	3,56
17	4,95	10,24	4,67
18	5,28	10,33	4,13
19	5,62	11,73	5,79
20	6,12	12,22	5,28
21	5,88	12,45	5,74
22	6,12	12,30	4,74
23	6,60	12,86	4,47
24	6,50	13,25	4,91
25	6,26	13,39	6,70
26	6,88	14,20	5,11
27	6,96	13,99	5,45
28	7,24	15,31	7,54
29	7,50	14,88	6,52
30	7,74	15,62	5,71
31	7,41	15,54	8,09
32	8,67	17,03	7,73
33	9,17	18,48	9,11
34	8,75	19,47	10,12
35	9,06	18,02	7,93
36	9,88	19,83	8,58
37	10,25	20,85	8,70
38	12,10	25,44	10,52
39	11,91	26,71	14,01
40	14,97	32,41	15,68
media	4,68	9,52	3,96

Per quanto attiene il rapporto tra i *risk margin* e la *best estimate* si osserva che:

- l'incidenza del *risk margin* rispetto alla *best estimate* non risulta uguale per tutte le imprese, ma dipende dalla variabilità della distribuzione della riserva. In particolare il livello relativo di prudenza richiesto (sia per il *risk margin* come percentile che come costo del capitale) risulta essere, tendenzialmente, crescente al diminuire delle dimensioni delle imprese, coerentemente all'aspettativa che il rischio (relativo) in *run-off* sia maggiore nelle piccole che nelle grandi;

Per quanto attiene il raffronto tra il criterio del costo del capitale e quello del 75-esimo percentile si rileva che:

- le imprese con dimensioni maggiori sono quasi tutte caratterizzate da un *risk margin* come CoC inferiore di quello determinato dal 75-esimo percentile (18 delle prime 20 società),
- un *risk margin* come 75-esimo percentile minore di quello calcolato come CoC è più frequente tra le imprese con dimensioni minori (si riscontra in 5 delle ultime 20 società).

Il criterio del costo del capitale appare cogliere il profilo di maggiore rischio attestato dalla dispersione della distribuzione delle perdite, che risulta maggiore nelle imprese più piccole. Ciò, probabilmente, in conseguenza del fatto che il *worst case*, per il calcolo del *risk capital*, è stato fissato come percentile al 99,5 % delle rispettive distribuzioni, e quindi sulle code "estreme" delle stesse, che risultano, in genere, essere più spesse per le imprese più piccole a causa della maggiore dispersione dei risultati rispetto alla *best estimate*.

Il grafico 5.1 riporta la ripartizione delle imprese del campione rispetto all'incidenza dei *risk margin* sulla *best estimate* per i diversi *benchmark*.

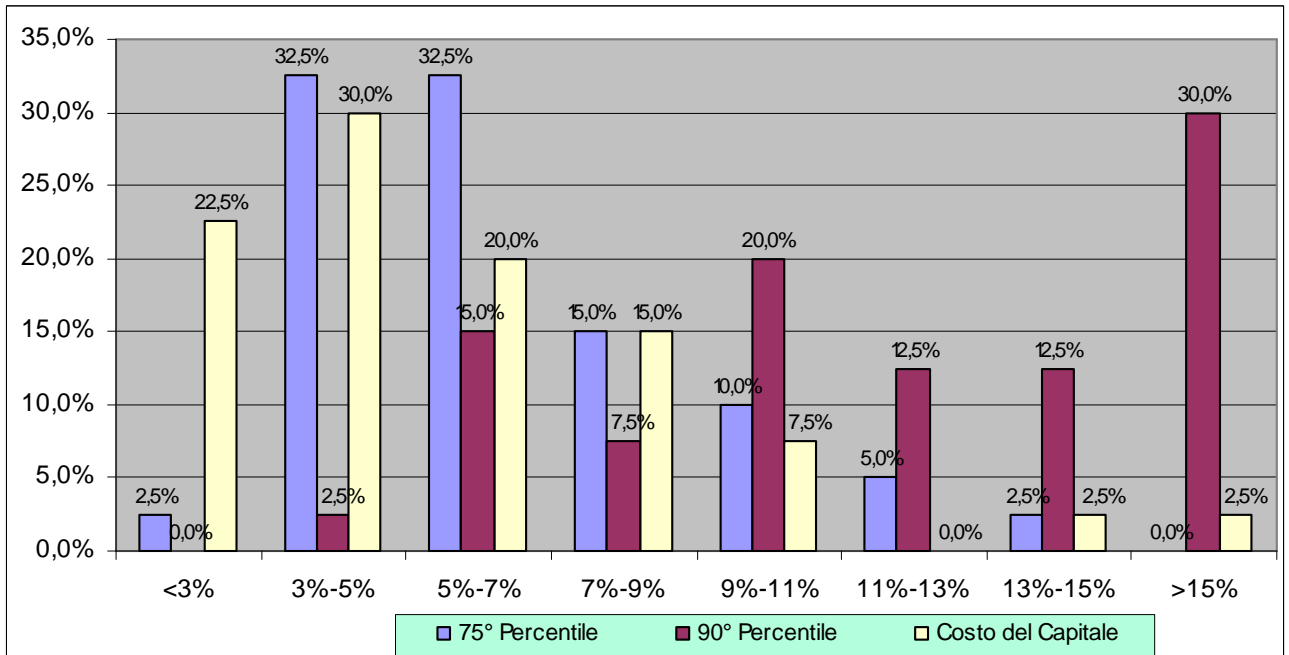
I dati evidenziano che i margini di rischio per il ramo RCA sono piuttosto contenuti. In particolare:

- il 52,5% delle imprese del campione ha un'incidenza del *risk margin* sulla *best estimate* inferiore al 5% se si considera il *risk margin* come CoC (il 35% nel caso del *benchmark* pari al 75-esimo percentile);
- il 72,5% delle imprese ha una incidenza del *risk margin* come CoC fino al 7% (il 67,5% per il *benchmark* pari al 75-esimo percentile).

5.2.3 Livello implicito di prudenza delle riserve sinistri

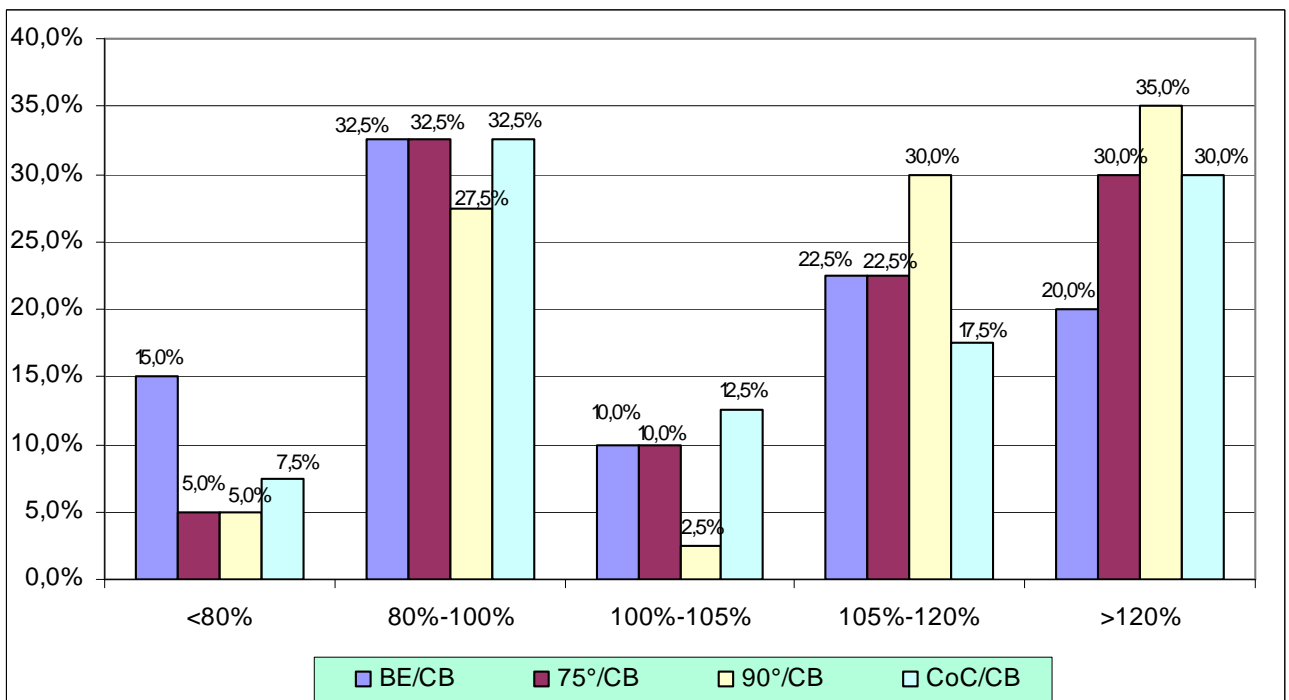
Il grafico 5.2 illustra come le imprese si distribuiscono in termini di adeguatezza delle riserve di bilancio 2004 rispetto ai *benchmark* proposti. Il livello implicito di prudenza contenuto nelle riserve di bilancio è espresso dal rapporto percentuale tra il singolo *benchmark* e la riserva sinistri dell'impresa. Quindi un valore del rapporto pari a 100 indica la perfetta coincidenza tra *benchmark* e riserve di bilancio, un valore superiore, o inferiore, a 100 indica, rispettivamente, una carenza o un surplus

Grafico 5.1. Ripartizione delle imprese secondo l'incidenza dei *risk margin* sulla *best estimate* per i diversi *benchmark*



degli accantonamenti rispetto a tali requisiti. Nel grafico è anche evidenziato il rapporto tra la *best estimate* e le riserve di bilancio (*current basis*, CB).

Grafico 5.2. Ripartizione delle imprese secondo l'adeguatezza delle riserve rispetto ai diversi *benchmark*



Il grafico 5.2 mostra che:

- il 40% delle imprese del campione ha un valore del rapporto tra il *benchmark* secondo il CoC e la riserva di bilancio inferiore al 100% (37,5% per il 75-esimo percentile);
- le percentuali salgono al 52,5% e al 47,5%, rispettivamente per il CoC e per il 75-esimo percentile, se si considera un valore del rapporto inferiore al 105%;
- il 30% delle imprese presenta un valore del rapporto tra il *benchmark* e la riserva di bilancio superiore al 120%, sia per il CoC che per il 75-esimo percentile.

Nella tabella 5.4 è riportato il dettaglio delle imprese con importi di riserva sinistri a costo ultimo inferiori ai diversi *benchmark* e che pertanto dovrebbero incrementare le proprie riserve.

In particolare sono stati riportati:

- a) il numero delle imprese che, nell'esercizio 2004, registrerebbero un importo di riserva inferiore al valore della riserva *benchmark*;
- b) l'importo complessivo che le società con riserva insufficiente dovrebbero integrare al fine di allinearsi con la riserva *benchmark*;
- c) la loro riserva complessiva;
- d) l'incidenza della riserva da integrare sul totale delle riserve dell'intero mercato;
- e) l'incidenza della loro riserva su quella complessiva di mercato.

Tabella 5.4. Insufficienze di riserva rispetto ai *benchmark* non scontati

	<i>(importi in milioni di Euro)</i>			
	BE	75°	90°	CoC
N. Imprese con riserva inferiore al <i>Benchmark</i>	21	25	27	24
Importo delle riserve da "aumentare" (a)	1.379	2.069	2.784	1.926
Riserva delle imprese che devono "aumentare" (b)	12.643	14.806	15.086	14.728
(a) / (b)	10,9%	14,0 %	18,5 %	13,1 %
(a) / riserva del mercato	5,7%	8,6 %	11,6 %	8,0 %
(b) / riserva del mercato	52,6%	61,6 %	62,7 %	61,3 %

I dati della tabella 5.4 evidenziano che il numero delle imprese con un valore di riserva inferiore al valore della *best estimate* più il costo del capitale è simile a quello individuato dal 75-esimo percentile (24 contro 25).

In particolare, tali imprese, che detengono riserve sinistri pari a circa il 61% del mercato, dovrebbero rivalutare i propri accantonamenti, rispettivamente, del 13% e del 14% circa (per circa 2.000 milioni di Euro con una incidenza, rispettivamente, dell'8% e dell'8,6% sulle riserve del mercato).

Salirebbero invece a 27 le imprese che non disporrebbero del 90-esimo percentile, e che dovrebbero incrementare le proprie riserve, pari al 56,1% del mercato, del 18,5% (per 2.784 milioni di Euro, pari all'11,6% del mercato).

Nella tabella 5.5 è riportato il dettaglio delle imprese con importi di riserva sinistri a costo ultimo superiori ai diversi benchmark e che pertanto dovrebbero ridurre le proprie riserve.

Tabella 5.5. Eccedenze di riserva rispetto ai *benchmark* non scontati

	<i>(importi in milioni di Euro)</i>			
	BE	75°	90°	CoC
N. Imprese con riserva superiore al <i>Benchmark</i>	19	15	13	16
Importo delle riserve da "diminuire" (a)	2.007	1.616	1.222	1.650
Riserva delle imprese che devono "diminuire" (b)	11.399	9.236	8.956	9.313
(a) / (b)	17,6%	17,5 %	13,6 %	17,7 %
(a) / riserva del mercato	8,3%	6,7 %	5,1 %	6,9 %
(b) / riserva del mercato	47,4%	38,4 %	37,3 %	38,7 %

Dai dati si può rilevare che il numero delle imprese con un valore di riserva superiore al valore della *best estimate* più il costo del capitale è simile a quello individuato al 75-esimo percentile (16 contro 15). In particolare, tali imprese, che detengono riserve sinistri pari a circa il 38% del mercato, dovrebbero ridurre i propri accantonamenti di circa il 18% (per un importo di oltre 1.600 milioni di Euro, pari a circa il 7% del mercato). Sono invece 13 le imprese, rappresentanti circa il 37% delle riserve del mercato, che dovrebbero ridurre le proprie riserve del 13,6% (1.222 milioni di Euro, pari al 5,1% del mercato) anche adottando il più prudentiale *benchmark* del 90-esimo percentile.

5.3 Analisi del mercato auto per fasce dimensionali

5.3.1 Ramo RCA: analisi per fasce di mercato

Le analisi sui dati di mercato sono state effettuate anche sulla base di dati aggregati, suddividendo le imprese in base alla dimensione delle riserve sinistri (RS) relative al bilancio 2004. In questa parte dello studio sono state considerate tutte le 75 imprese autorizzate nel 2004.

Le imprese del mercato sono state suddivise in 4 gruppi, o fasce di riserva; per ogni singola fascia il triangolo di *run-off* è stato costruito come somma dei pagamenti delle singole imprese.

La tabella 5.7 riporta i risultati delle elaborazioni.

Dai dati emerge che:

Tabella 5.6. Le fasce di riserva

Fascia	Riserva di Bilancio	N.ro di imprese
1	$1.000 \leq RS$	9
2	$250 \leq RS < 1.000$	16
3	$50 \leq RS < 250$	24
4	$0 \leq RS < 50$	26

Tabella 5.7. Ramo RCA: variabilità delle OLL aggregate per fasce di riserva

(importi in milioni di Euro)

Fascia	Riserva di Bilancio	<i>Best Estimate</i>	<i>Standard Deviation</i>	Coeff. di variazione	75° percentile	90° percentile	95° percentile
1	15.114	14.379	489,85	3,41	14.692	15.010	15.209
2	7.545	7.662	255,68	3,34	7.828	7.976	8.065
3	2.702	3.041	155,93	5,13	3.141	3.245	3.316
4	356	510	109,82	21,52	583	658	702
mercato	25.717	25.230	726,55	2,88	25.688	26.142	26.457

- o a livello aggregato, il mercato RCA presenta nel 2004 un livello implicito di prudenzialità delle riserve a costo ultimo sostanzialmente pari al 75-esimo percentile;
- o la prima fascia (9 imprese con riserve sinistri complessive di 15.114 milioni di Euro, pari al 58,7% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve superiori del 2,9% al 75-esimo percentile, e sostanzialmente in linea con il 90-esimo (0,7%);
- o le imprese della seconda fascia (16 imprese con riserve sinistri di 7.545 milioni di Euro, pari al 29,3% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve prossime, per difetto, al 75-esimo percentile (-3,6%);
- o le imprese della terza fascia (24 imprese con riserve sinistri di 2.702 milioni di Euro, pari al 10,5% delle riserve sinistri del ramo) risultano complessivamente caratterizzate da riserve significativamente inferiori al 75-esimo percentile (-14%);
- o le imprese della quarta fascia (26 imprese con riserve sinistri di 356 milioni di Euro, pari all'1,3% circa delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve inferiori del 39% al 75-esimo percentile. Tuttavia, in questo caso la dimensione del risultato deve essere interpretata con cautela, essendo presente in questa fascia una sensibile variabilità dei risultati (incidenza della deviazione standard sulla *best estimate* pari al 21,52%).

Nei grafici 5.3 e 5.4 è rappresentata la distribuzione di probabilità delle prestazioni totali, rispettivamente, nel metodo ODP e nel metodo DFCL. Il confronto tra le due curve mostra, come già osservato a livello numerico (cfr. par. 4.2.1.1.), la maggiore concentrazione delle stime di riserva effettuate con il metodo DFCL. Sulle due curve, sono stati evidenziati, oltre al valore della *best estimate*

(praticamente coincidente con il 50-esimo percentile), le stime di riserva calcolate come percentile al livello, rispettivamente, del 50%, 75%, 90%, 95%, 99% e 99,5%.

Grafico 5.3. Distribuzione di probabilità dei pagamenti totali – metodologia ODP.

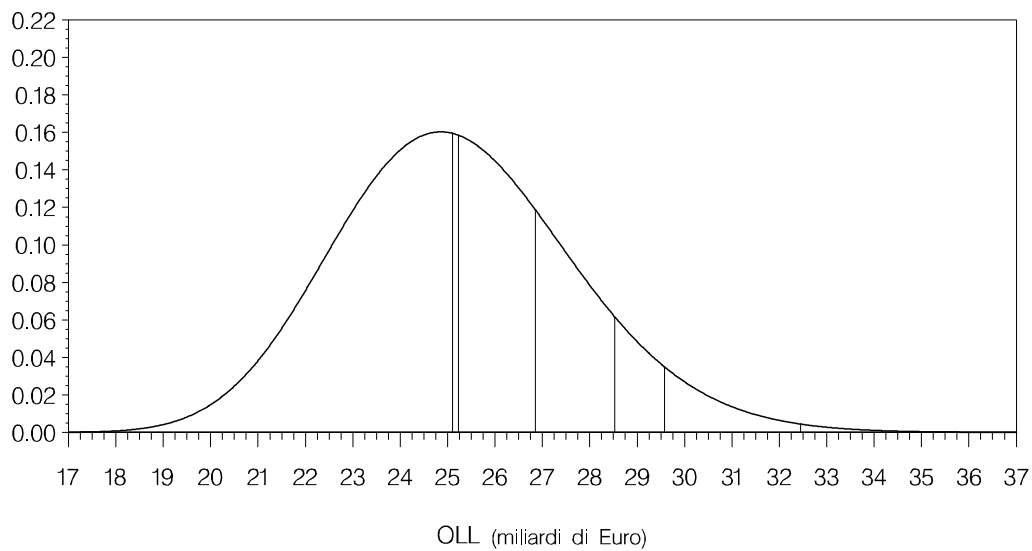
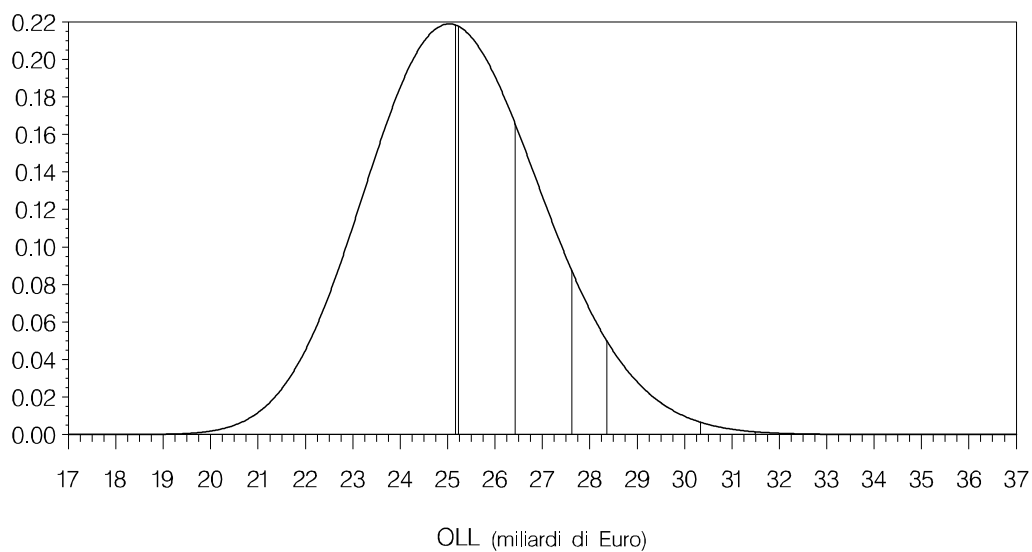


Grafico 5.4. Distribuzione di probabilità dei pagamenti totali – metodologia DFCL.



5.3.2 Ramo CVT: analisi per fasce di mercato

Con riferimento al ramo CVT, le cui serie storiche erano limitate alla fine del 2004 a sette anni di sviluppo, i risultati a livello aggregato di mercato suddiviso nelle medesime quattro classi definite per il ramo RCA hanno evidenziato le risultanze riportate nella tabella 5.8.

Tabella 5.8. Ramo CVT: variabilità delle OLL aggregate per fasce di riserva

(importi in milioni di Euro)

Fascia	Riserva di Bilancio	<i>Best Estimate</i>	<i>Standard Deviation</i>	Coeff. di variazione	75° percentile	90° percentile	95° percentile
1	350	326	15,170	4,66	336	345	351
2	189	158	9,786	6,19	164	171	175
3	87	79	7,263	9,19	84	88	91
4	64	39	9,720	25,13	44	52	56
mercato	691	602	22,565	3,75	617	631	640

Dai dati emerge che:

- a livello aggregato, il mercato CVT presenta, nel 2004, un livello implicito di prudenzialità delle riserve a costo ultimo significativamente superiore al 95-esimo percentile (+8% circa);
- le imprese della prima fascia (9 imprese, con riserve sinistri complessive di 350 milioni di Euro, pari al 51% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve superiori del 4,8% circa al 75-esimo percentile, e sostanzialmente pari al 90-esimo;
- le imprese della seconda fascia (16 imprese, con riserve sinistri di 189 milioni di Euro, pari al 27% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve superiori del 15% al 75-esimo percentile, del 10,5% al 90-esimo e dell'8% anche nel caso del 95-esimo percentile;
- le imprese della terza fascia (24 imprese, con riserve sinistri di 87 milioni di Euro, pari al 13% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve superiori del 3,6% circa al 75-esimo percentile, e lievemente inferiori al 90-esimo (-1,7%);
- le imprese della quarta fascia (26 imprese, con riserve sinistri di 64 milioni di Euro, pari al 9% delle riserve sinistri del ramo) risultano possedere riserve superiori del 45% al 75-esimo percentile. Anche in questo caso, tuttavia, il dato deve essere interpretato con cautela, essendo la fascia caratterizzata da una elevata variabilità nei risultati (coefficiente di variazione pari a 25,13%).

In generale il ramo CVT è risultato caratterizzato da una variabilità, misurata attraverso i coefficienti di variazione, nettamente superiore a quella del ramo RCA, fatto probabilmente dovuto alla minore stabilità di sviluppo dei pagamenti.

5.4 Riserve attualizzate

L'attuale normativa italiana dispone che l'ammontare accantonato deve essere determinato come somma dei futuri pagamenti non scontati. Tuttavia, se si considera un adeguato *risk margin*, i *payoff* attesi così caricati potrebbero essere scontati, fornendo un ideale equivalente certo degli impegni futuri dell'assicuratore (cfr. par. 4.3.6)

L'attualizzazione sui vari anni di scadenza dei pagamenti, calcolata nel modello ODP, è stata effettuata con la struttura dei tassi *risk-free* riportati nella tabella 5.1, utilizzando sia la procedura di sconto esatta (cfr. par. 5.1, punto c), che quella approssimata applicando direttamente il fattore di sconto globale medio φ agli importi totali non scontati.

La tabella 5.9 riporta gli scostamenti percentuali dei valori di riserva attualizzata al 75-esimo, al 90-esimo e al 95-esimo percentile, ottenute con le due procedure di sconto. Come al solito, le imprese sono ordinate per valori crescenti del coefficiente di variazione dell'ODP.

Dall'analisi dei dati emerge che:

- o in generale lo scostamento tra l'applicazione della metodologia ODP con una procedura di sconto esatta e con approssimazione mediante il fattore φ conduce sostanzialmente al medesimo risultato (con una leggera sovrastima usando il fattore φ). Infatti lo scostamento medio registrato al 75-esimo percentile è pari allo 0,21%, è uguale allo 0,46% per il 90-esimo percentile e arriva allo 0,6% per il 95-esimo. Risulta pertanto immediato il vantaggio, ad esempio in sede computazionale, di impiegare la tecnica di *bootstrapping* sui pagamenti non scontati e quindi di attualizzare i valori ottenuti mediante il fattore di sconto medio.

5.4.1 I *risk margin* e la loro incidenza sulla *best estimate*

In analogia a quanto riportato per il *risk margin* a costo ultimo, la tabella 5.10 mostra, per ogni impresa del campione, l'incidenza, sempre rispetto alla *best estimate* non scontata, del *risk margin* scontato, calcolato al 75-esimo percentile, al 90-esimo percentile e come costo del capitale (CoC). È riportata anche l'incidenza percentuale della *best estimate* scontata sulla *best estimate* non scontata (che corrisponde al valore, in percentuale, del fattore $\varphi = M_0/\bar{L}$). Il *reserve risk capital* per il calcolo del CoC è stato determinato come indicato al punto d) del paragrafo 5.1. Anche qui l'ordinamento è per valori crescenti del coefficiente di variazione ODP.

La tabella 5.10 mette in evidenza che:

- l'incidenza del *risk margin* calcolato tramite il costo del capitale si attesta, in media, ad un livello non dissimile, sebbene inferiore rispetto a quello fornito dal 75-esimo percentile (rispettivamente 3,42% e 4,52%);
- l'incidenza del *risk margin* rispetto alla *best estimate* dipende dalla variabilità della distribuzione della riserva stessa. In particolare il livello relativo di prudenza richiesto (sia per il *risk margin* co-

Tabella 5.9. Modello ODP: *risk margin* come quantili e come costo del capitale

(valori percentuali)

<i>n</i>	Scostamento con φ -sconto		
	75° percentile	90° percentile	95° percentile
1	0,08	0,15	0,20
2	0,11	0,24	0,23
3	0,11	0,24	0,23
4	0,09	0,25	0,32
5	0,12	0,22	0,25
6	0,13	0,33	0,38
7	0,08	0,18	0,25
8	0,10	0,23	0,31
9	0,18	0,29	0,40
10	0,09	0,28	0,35
11	0,12	0,36	0,51
12	0,15	0,25	0,36
13	0,22	0,50	0,62
14	0,25	0,31	0,49
15	0,22	0,27	0,37
16	0,19	0,32	0,41
17	0,23	0,44	0,62
18	0,22	0,35	0,46
19	0,27	0,53	0,72
20	0,26	0,52	0,70
21	0,16	0,48	0,68
22	0,10	0,38	0,56
23	0,23	0,37	0,59
24	0,28	0,47	0,69
25	0,23	0,67	0,90
26	0,17	0,44	0,76
27	0,24	0,51	0,62
28	0,24	0,54	0,72
29	0,18	0,39	0,50
30	0,14	0,30	0,39
31	0,21	0,52	0,55
32	0,52	1,02	1,30
33	0,16	0,48	0,49
34	0,31	0,77	0,87
35	0,18	0,49	0,69
36	0,19	0,56	0,64
37	0,39	0,64	0,84
38	0,37	0,77	1,11
39	0,58	1,50	2,10
40	0,28	0,69	0,82

Tabella 5.10. Modello ODP con *discounting*: *risk margin* come quantili e come costo del capitale

<i>n</i>	media scontata (% BE)	75° percentile	90° percentile	Cost of Capital
		RM (% BE)	RM (% BE)	RM (% BE)
1	92,07	2,11	4,02	1,34
2	92,71	2,73	5,15	1,59
3	92,06	2,82	5,32	1,72
4	91,77	2,71	5,50	1,91
5	93,52	2,96	5,73	1,67
6	91,27	2,99	5,83	2,18
7	91,79	3,05	5,98	2,19
8	93,42	3,60	7,05	2,17
9	91,79	3,60	7,01	2,47
10	91,93	3,85	7,40	2,52
11	91,87	3,73	7,99	3,06
12	93,22	4,21	8,30	2,34
13	91,72	4,28	8,43	2,96
14	91,49	4,42	8,70	3,18
15	93,10	4,68	8,86	2,61
16	92,08	4,51	8,70	2,86
17	90,69	4,27	8,85	3,62
18	92,11	4,65	9,16	3,25
19	90,94	4,85	10,14	4,53
20	91,44	5,35	10,65	4,14
21	91,09	5,19	10,85	4,48
22	92,23	5,55	10,95	3,76
23	93,01	5,91	11,58	3,69
24	92,49	5,74	11,77	3,87
25	91,11	5,49	11,51	5,16
26	92,77	6,22	12,71	4,05
27	92,69	6,21	12,44	4,31
28	90,15	6,30	13,24	5,84
29	92,31	6,75	13,33	5,28
30	92,87	7,05	14,18	4,65
31	91,47	6,57	13,68	6,34
32	91,82	7,45	14,55	5,97
33	91,27	8,21	16,35	7,36
34	90,97	7,66	16,88	7,95
35	92,29	8,18	16,10	6,27
36	92,35	8,93	17,69	6,71
37	91,99	9,04	18,48	6,82
38	92,36	10,79	22,61	8,64
39	91,77	10,33	22,79	10,47
40	91,74	13,43	28,90	12,84
media	92,02	4,16	8,39	3,14

me percentile che come costo del capitale) risulta essere, tendenzialmente, crescente al diminuire delle dimensioni delle imprese;

- solo in due casi il *risk margin* come CoC è più elevato di quello calcolato al 75-esimo percentile (imprese in 34-esima e 39-esima posizione). Per tutte le imprese del campione il *risk margin* come CoC è inferiore a quello calcolato al 90-esimo percentile. Le differenze tra *risk margin* come CoC e *risk margin* come percentile non appaiono significativamente correlate con la dimensione dell'impresa.

Da un raffronto tra i valori assoluti dei *risk margin* scontati e di quelli ante-sconto è inoltre emerso che:

- in caso di *discounting* i *risk margin* si riducono in media, rispetto a quelli a costo ultimo, dell'11,1% e del 12%, rispettivamente, nel caso del 75-esimo e del 90-esimo percentile, e del 21% nel caso del costo del capitale. La sensibile riduzione percentuale del margine calcolato secondo il criterio del costo del capitale (quasi doppia rispetto al criterio del percentile) potrebbe ascrivere al fatto che in questo caso l'attualizzazione ha un effetto più marcato, essendo il *maturity factor* $\hat{\mu}$ (cfr. tav. 4.3, metodo YEE-*discounted*) calcolato su una successione di flussi residui.

5.4.2 Livello implicito di prudenza delle riserve sinistri

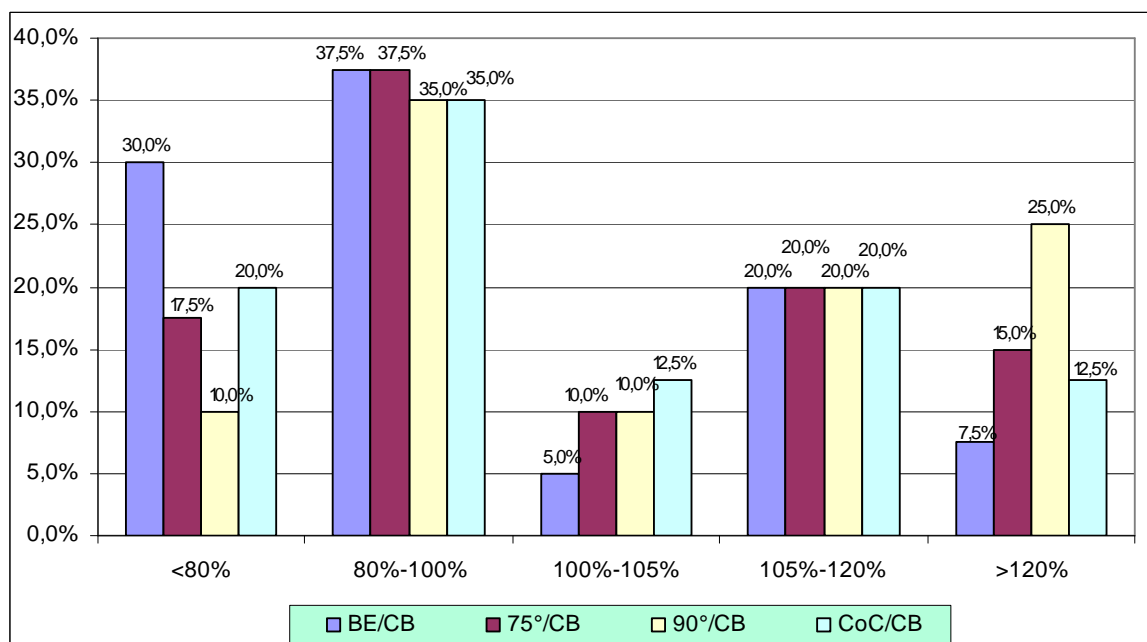
I *benchmark* scontati possono essere intesi come una definizione alternativa del requisito di riserva. Nel grafico 5.5 è illustrata la distribuzione delle imprese del campione in termini di adeguatezza delle riserve di bilancio 2004 rispetto ai nuovi *benchmark*. Il raffronto è utile per identificare quante delle imprese con riserve a costo ultimo inferiori ai corrispondenti *benchmark* “risulterebbero in regola” secondo quelli scontati³. Anche in questo caso il livello implicito di prudenza contenuto nelle riserve di bilancio è espresso dal rapporto percentuale tra il singolo *benchmark* e la riserva sinistri dell'impresa. Quindi un valore del rapporto pari a 100 indica la perfetta coincidenza tra *benchmark* e riserve di bilancio, un valore superiore o inferiore a 100 indica rispettivamente, una carenza o un surplus degli accantonamenti rispetto a tali requisiti. Nel grafico è anche evidenziato il rapporto tra la *best estimate* e le riserve di bilancio (CB).

Il grafico mostra che con i *benchmark* scontati:

- il 55% delle imprese del campione assume un valore del rapporto tra il *benchmark* e la riserva di bilancio inferiore al 100%, sia considerando il *risk margin* come CoC che il 75-esimo percentile.
- il 67,5% delle imprese è caratterizzato da un rapporto inferiore al 105% per il CoC. Una percentuale simile (65%) si riscontra nel caso del 75-esimo percentile;

³In tal caso tali imprese non potrebbero di fatto operare alcuno sconto e pertanto le riserve a costo ultimo dovrebbero essere considerate come se fossero già attualizzate.

Grafico 5.5. Ripartizione delle imprese secondo l'adeguatezza delle riserve rispetto ai *benchmark* scontati



- nel caso del *risk margin* come costo del capitale il 12,5% delle imprese presenta un rapporto superiore al 120%, mentre per il 75-esimo percentile la percentuale sale al 15%.

Analogamente al caso non scontato, nella tabella 5.11 si riportano per le riserve attualizzate le seguenti informazioni:

- il numero delle imprese che, nell'esercizio 2004, registrerebbero un importo di riserva inferiore al valore della riserva *benchmark*;
- l'importo complessivo con il quale dovrebbero integrare la propria riserva al fine di allinearsi con la riserva *benchmark*;
- la loro riserva complessiva;
- l'incidenza della riserva da integrare su quella complessiva di mercato;
- l'incidenza della loro riserva complessiva su quella di mercato.

I dati evidenziano che 18 imprese hanno un livello implicito di prudenza inferiore sia al valore della *best estimate* più il costo del capitale, sia a quello individuato al 75-esimo percentile. In particolare, tali imprese, che detengono riserve sinistri pari a circa il 33% del mercato, dovrebbero incrementare i propri accantonamenti, rispettivamente, del 9,8% e del 11,2% (rispettivamente 767 e 874 milioni di Euro, con una incidenza del 3,2% e del 3,6% sulle riserve del mercato). Salirebbero invece a 22 le

Tabella 5.11. Insufficienze di riserva rispetto ai *benchmark* scontati

(importi in milioni di Euro)

	BE	75°	90°	CoC
N. Imprese con riserva inferiore al <i>Benchmark</i>	13	18	22	18
Importo delle riserve da "aumentare" (a)	518	874	1.370	767
Riserva delle imprese che devono "aumentare" (b)	5.688	7.829	12.328	7.829
(a) / (b)	9,1%	11,2 %	11,1 %	9,8%
(a) / riserva del mercato	2,2%	3,6 %	5,7 %	3,2%
(b) / riserva del mercato	23,7%	32,6 %	51,3 %	32,6%

imprese che non disporrebbero del 90-esimo percentile, e che dovrebbero incrementare le proprie riserve, pari al 51,3% del mercato, del 11,1% (per 1.370 milioni di Euro, pari al 5,7% del mercato).

Nella tabella 5.12 è riportato il dettaglio delle imprese con importi di riserva sinistri a costo ultimo superiori ai diversi *benchmark* e che pertanto dovrebbero ridurre le proprie riserve.

Tabella 5.12. Eccedenze di riserva rispetto ai *benchmark* scontati

(importi in milioni di Euro)

	BE	75°	90°	CoC
N. Imprese con riserva superiore al <i>Benchmark</i>	27	22	18	22
Importo delle riserve da "diminuire" (a)	3.020	2.416	1.941	2.552
Riserva delle imprese che devono "diminuire" (b)	18.354	16.213	11.714	16.213
(a) / (b)	16,5%	14,9 %	16,6 %	15,7 %
(a) / riserva del mercato	12,6%	10,0 %	8,1 %	10,6 %
(b) / riserva del mercato	76,3%	67,4 %	48,7 %	67,4 %

I dati evidenziano che 22 imprese hanno un livello implicito di prudenza superiore sia al valore della *best estimate* più il costo del capitale, sia a quello individuato al 75-esimo percentile. In particolare, tali imprese, che detengono riserve sinistri pari a circa il 67% del mercato, dovrebbero ridurre i propri accantonamenti, rispettivamente, del 15,7% e del 14,9% (rispettivamente 2.552 e 2.416 milioni di Euro, per una incidenza del 10,6% e del 10% sulle riserve del mercato). Sono invece 18 le imprese il cui livello di prudenza supera il 90-esimo percentile, e che dovrebbero ridurre le proprie riserve, pari al 48,7% del mercato, del 16,6% (per 1.941 milioni di Euro, pari all'8,1% del mercato). Si osserva tuttavia che in questo caso, poiché sarebbe permesso il *discounting* anche per le riserve di bilancio (agli stessi tassi *risk-free* utilizzati per i *benchmark*), è probabile che per le imprese si ripristini la situazione di prudenza già esposta per i *benchmark* a costo ultimo.

5.4.3 Impatto del *discounting* sui *benchmark* e sul livello implicito di prudenza delle riserve sinistri RCA 2004

Il passaggio dal costo ultimo al *discounting* comporta una riduzione per tutti e tre i *benchmark*. In particolare, il requisito di riserva al 75-esimo percentile si riduce dell'8%, quello al 90-esimo dell'8,3%, e quello col costo del capitale dell'8,5%. Nelle tabelle 5.13 e 5.14 è sintetizzato il livello implicito delle riserve del mercato (inteso come somma delle riserve del campione) in relazione ai *benchmark* proposti, prima e dopo l'applicazione del *discounting*.

Tabella 5.13. Metodo ODP – Valutazioni a costo ultimo

<i>Eccedenze rispetto al benchmark di riferimento</i>							
<i>best estimate</i>		<i>75° percentile</i>		<i>90° percentile</i>		<i>Cost of Capital</i>	
Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)
629	2,6	-453	-1,9	-1.562	-6,5	-276	-1,1

Tabella 5.14. Metodo ODP – Valutazioni scontate

<i>Eccedenze rispetto al benchmark di riferimento</i>							
<i>best estimate</i>		<i>75° percentile</i>		<i>90° percentile</i>		<i>Cost of Capital</i>	
Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)	Importo (mln Euro)	Incidenza (%)
2.502	10,4	1.542	6,4	571	2,4	1.785	7,4

Dai dati emerge che il livello implicito di riservazione del mercato RCA 2004 passa dal 75-esimo al 90-esimo percentile, mentre risulta significativamente superiore sia al requisito del 75-esimo percentile (6,4%) sia a quello del costo del capitale (7,4%).

5.5 Applicazione ai dati dei pagamenti in valuta corrente

5.5.1 Il problema dell'inflazione nel calcolo della riserva

In tutti i rami in cui la copertura assicurativa è finalizzata al ripristino del valore reale del bene assicurato, i costi di rimborso sono tipicamente esposti a fenomeni inflattivi. Di solito l'inflazione dei rimborsi è specifica del ramo considerato, potendo essere considerata come la composizione di una *inflazione economica* (l'usuale inflazione dei prezzi al consumo o dei salari) e di una *inflazione sovrapposta*, che descrive l'incremento dei costi tipici di ramo. Quando le tecniche *run-off* per la determinazione delle riserve sono applicate direttamente a triangoli dei pagamenti espressi in termini di costi storici

– come effettuato nel paragrafo 5.2 – si considera implicitamente il *trend* inflattivo realizzato nel passato (sia economico che specifico di ramo) come incorporato nel meccanismo di sviluppo dei costi di rimborso. In questo caso le tecniche di proiezione riproducono automaticamente nei pagamenti futuri l'inflazione storica. Gli stessi effetti si avranno se si applica un modello stocastico di *loss reserving*, con la conseguenza aggiuntiva che la variabilità storica (anno su anno) dell'inflazione potrà influenzare anche la variabilità dei pagamenti futuri, e quindi la dispersione della distribuzione di probabilità delle OLL.

5.5.2 Trattamento degli effetti inflattivi

Per tenere sotto controllo gli effetti inflattivi l'analisi è stata sviluppata nei seguenti passi:

- 1) è stata stimata la serie storica annuale di inflazione specifica di ramo;
- 2) sono stati rivalutati i pagamenti sulla medesima diagonale del "triangolo passato" con i tassi di inflazione corrispondenti;
- 3) è stato applicato il modello di calcolo della riserva al triangolo dei pagati "a costi correnti" ottenuto con la rivalutazione (del passo 2);
- 4) sono stati rivalutati i pagamenti futuri ottenuti con un opportuno modello di inflazione, deterministico o stocastico.

Se l'approccio è stocastico, il modello per l'inflazione proiettata dovrebbe includere sia una componente di inflazione attesa che una componente di volatilità inflattiva e gli ultimi due passi dovrebbero essere integrati in un modello in condizioni di incertezza che descrive sia la componente "tecnica" che la componente inflattiva dello sviluppo dei costi.

5.5.3 Stima dell'inflazione storica del ramo RCA

Per ricavare una serie storica di tassi di inflazione per l'RCA sono stati considerati, oltre ai dati relativi agli importi pagati, anche quelli sul numero di pagamenti. Per ciascuna impresa del campione gli importi pagati sono stati divisi per il corrispondente numero di pagamenti; è stato così costruito il triangolo dei *costi (medi) unitari (average cost per claim paid, CPCP)*: $\bar{C}_{i,j}$. Fissato l'anno di sviluppo $j (= 1, 2, \dots, n)$, la serie storica dei costi unitari sostenuti dall'impresa nell'anno di bilancio i per sinistri pagati con un ritardo j è data dai valori:

$$\bar{C}_{1,j}, \bar{C}_{2,j}, \dots, \bar{C}_{d_j,j},$$

dove $d_j = 10 - j + 1$ è l'indice dell'ultima diagonale del triangolo.

Sono state quindi analizzate tutte le serie storiche di costi medi RCA delle 40 compagnie del campione, considerando i relativi triangoli decennali 1995-2004.

Dall'esame dei dati è sembrato ragionevole accettare la congettura che l'informazione sulla componente sistemica dell'inflazione RCA sia essenzialmente contenuta nell'evoluzione temporale dei costi medi del primo anno di sviluppo. Sulla base di questa ipotesi la stima dell'inflazione di ramo è stata ricavata dalla sola serie storica decennale dei costi medi:

$$\bar{C}_{1,1}, \bar{C}_{2,1}, \dots, \bar{C}_{10,1}.$$

Si è ricavata quindi la serie annua dei tassi di inflazione dal 1996 al 2004 e, per ogni anno di calendario i , è stata calcolata la media ponderata dei tassi di inflazione su tutte le imprese, usando diversi criteri di ponderazione. Le serie storiche dei tassi annui di inflazione medi r_i così calcolati con i diversi metodi di ponderazione sono riportate nella tabella 5.15, dove:

- $r_i^{(E)}$: è il tasso medio equipesato;
- $r_i^{(R)}$: è il tasso medio ponderato con le riserve di bilancio R^s ;
- $r_i^{(P)}$: è il tasso medio ponderato col totale dei pagati S ;
- $r_i^{(U)}$: è il tasso medio ponderato coi costi ultimi totali U prodotti dal *chain-ladder*;
- $r_i^{(e)}$: è il tasso di inflazione economica.

Nell'ultima riga della tabella 5.15 sono riportati i tassi annui medi di inflazione di ramo nel periodo 1996-2004. Come si osserva, in tutte le serie considerate l'inflazione annua è caratterizzata da elevata variabilità; in ogni caso, l'inflazione media di ramo sul periodo considerato è risultata superiore al 9% annuo.

Tabella 5.15. Tassi di inflazione storici

anno	$r^{(E)}$	$r^{(R^s)}$	$r^{(P)}$	$r^{(U)}$	$r^{(e)}$
1996	7,66	5,99	5,70	5,76	3,9
1997	7,26	6,33	6,55	6,50	1,7
1998	10,25	11,60	11,60	11,60	1,8
1999	7,07	5,96	6,35	6,27	1,6
2000	7,84	6,68	6,80	6,77	2,6
2001	13,50	12,82	13,82	13,60	2,7
2002	10,49	9,29	9,19	9,21	2,4
2003	10,11	9,29	9,25	9,26	2,5
2004	10,23	14,99	13,26	13,65	2,0
media	9,36	9,17	9,13	9,14	2,4

5.5.4 Un aggiustamento per i cambiamenti nella velocità di liquidazione

Poiché l'ammontare dei costi per rimborso effettuati nei diversi anni di bilancio può essere molto diverso a seconda dell'anno di sviluppo, le osservazioni sull'inflazione di ramo possono risultare

fortemente distorte qualora le imprese abbiano applicato nel tempo diverse strategie di indennizzo, cioè – in particolare – abbiano variato la velocità di liquidazione. Infatti una variazione del CPCP osservata in un dato anno di calendario potrebbe essere solo parzialmente causata da una variazione generale del livello dei costi di ramo, qualora sia stata anche messa in atto una anticipazione o una dilazione nella liquidazione dei sinistri più costosi.

Se è disponibile qualche informazione sull'andamento storico della velocità di liquidazione, è possibile, sotto opportune ipotesi, introdurre compensazioni di questi effetti sull'andamento dell'inflazione osservata.

Al riguardo, nello studio è stato adottato un semplice modello per tener conto degli effetti dei cambiamenti nella velocità di liquidazione sull'inflazione di ramo osservata. Il modello utilizza dati aggregati per anno di bilancio relativi al numero di sinistri chiusi senza seguito in ciascun anno di sviluppo, espressi come frazione del numero di sinistri aperti all'inizio dello stesso anno. Sotto alcune ipotesi semplificatrici, è stata ricavata una serie di fattori di correzione per i fattori di inflazione osservati per i sinistri rimborsati nel primo anno di sviluppo⁴.

5.5.5 Selezione della serie storica dell'inflazione di ramo

I tassi medi di inflazione di ramo sono stati definiti e calcolati utilizzando diversi criteri di ponderazione. In linea di principio è possibile che la scelta del particolare criterio di ponderazione produca, nei costi proiettati, effetti che dipendono in modo sistematico dalla dimensione d'impresa; ciò introdurrebbe una distorsione indesiderata nella stima dei requisiti di riserva.

Per tenere sotto controllo questo possibile effetto è stata effettuata una approfondita analisi econometrica⁵, le cui risultanze hanno confermato l'ipotesi che nessuna distorsione sistematica nella valutazione delle OLL attese viene introdotta dai diversi criteri di ponderazione dell'inflazione media, purché si abbia cura di applicare a ogni anno della serie il corrispondente tasso di inflazione (si trova invece che effetti distorsivi possono aversi effettuando la rivalutazione a un tasso annuo costante medio).

Per depurare i dati dall'effetto dell'inflazione storica si è deciso di adottare i tassi di inflazione medi ponderati col totale dei pagati cumulati. Come riportato nella tabella 5.15, il tasso annuo di inflazione sull'intero periodo storico 1996-2004 risulta pari al 9,1%.

⁴Una descrizione dettagliata del modello è fornita in De Felice, Moriconi 2006 [10], appendice B.

⁵I triangoli dei pagamenti delle imprese del campione sono stati rivalutati a costi correnti, utilizzando le diverse serie di tassi di inflazione riportati nella tabella 5.15 ed è stato quindi calcolato il valore stimato delle corrispondenti OLL totali \bar{L} utilizzando l'algoritmo *chain-ladder*. È stata poi effettuata una regressione lineare della differenza relativa tra il valore di \bar{L} a costi correnti e il corrispondente valore a costi storici, usando la riserva di bilancio R^s come regressore. In tutte le regressioni il coefficiente angolare è risultato non significativamente diverso da zero; tra i diversi criteri di ponderazione considerati, l'r-quadro è variato tra un minimo di 0,013 e un massimo 0,015.

5.5.6 Applicazione del *chain-ladder* ai dati a costi correnti

Come si è detto, la neutralizzazione dei pagamenti storici dall'inflazione di ramo ha impatto diretto sulle proiezioni dei costi futuri; per valutare questo effetto è stato applicato l'algoritmo del *chain-ladder* a tutti i triangoli degli importi pagati RCA delle 40 imprese, dopo aver espresso gli importi a costi correnti sulla base della serie inflattiva adottata. Nella tabella 5.16 sono riportati i livelli della *best estimate* a costi correnti (espressi in milioni di Euro) delle imprese del campione, considerate globalmente e suddivise nelle 4 fasce, raffrontati con la *best estimate* ottenuta sulla base dei costi storici.

Tabella 5.16. Neutralizzazione dell'inflazione storica: effetti sulla *best estimate*

(importi in milioni di Euro)

Fascia	Riserva di bilancio	<i>BE</i> a costi storici	<i>BE</i> a costi correnti	differenza	(%)
1	15.114	14.117	11.216	-2.901	-20,6
2	7.257	7.604	6.033	-1.571	-20,7
3	1.542	1.556	1.234	-323	-20,7
4	128	136	109	-27	-19,7
tot. campione	24.042	23.413	18.592	-4.821	-20,6

Risulta evidente dai dati riportati nella tabella la diminuzione della *best estimate* dovuta alla “neutralizzazione” dell'inflazione. Sull'intero campione si ha una diminuzione del 20,6%; l'effetto risulta inoltre pressoché identico su tutte le fasce considerate, a conferma del fatto, già sottolineato, che la rivalutazione dei dati storici non risente sistematicamente della dimensione delle imprese.

5.6 Applicazione dei modelli con inflazione stocastica ai dati rivalutati

Naturalmente le stime corrette per le *liability* in-essere si hanno incorporando nelle proiezioni un'opportuna ipotesi sull'inflazione futura.

Considerato che si è interessati sia all'analisi di trend che a quella di variabilità, l'inflazione di ramo è stata descritta mediante un opportuno modello stocastico. Supponendo indipendenza tra lo sviluppo inflattivo e lo sviluppo tecnico dei costi dei sinistri, le *liability* future rivalutate si ottengono moltiplicando i costi futuri prodotti dalle metodologie stocastiche di *loss reserving* (applicate ai triangoli rivalutati) per un fattore inflattivo, che rappresenta l'“indice dei prezzi di ramo” nei vari anni di *run-off*. Il fattore inflattivo è stato rappresentato come un processo stocastico di tipo lognormale (moto browniano geometrico), caratterizzato da un trend di crescita (tasso atteso di inflazione) e da una volatilità assegnati. Con semplici accorgimenti, il modello stocastico per l'inflazione può essere incorporato sia nella metodologia ODP che in quella di Mack.

Visto che l'ODP viene applicata con procedura simulativa, l'inflazione proiettata può essere aggiunta semplicemente allo sviluppo tecnico dei costi moltiplicando i valori simulati in ogni diagonale futura per una variabile aleatoria campionata da una distribuzione lognormale con media e varianza specificate.

Con il modello DFCL è possibile ricavare con formula chiusa media e varianza dei pagamenti su ciascuna diagonale. Tenuto conto che l'espressione per la varianza totale è piuttosto complicata, si è preferito adottare in questo caso una semplice approssimazione⁶.

5.6.1 Risultati dai modelli con inflazione stocastica

I modelli ODP e DFCL arricchiti con la componente di inflazione stocastica sono stati applicati ai triangoli dei pagamenti a costi correnti delle imprese del campione, assumendo per l'inflazione futura un tasso annuo del 7,5% e una volatilità su base annua del 4%. Nella tabella 5.17 sono riportate, per ogni impresa, le differenze percentuali tra i *benchmark* non scontati ottenuti applicando il modello di inflazione stocastica ai dati a costi correnti e i corrispondenti *benchmark* non scontati ricavati dai dati a costi storici. I *benchmark* considerati sono la *best estimate* e il 75-esimo e 90-esimo percentile. Sono anche riportati i valori medi calcolati sull'intero campione, pesati con i valori della *best estimate* a costi storici non scontata. Nella tabella 5.18 sono riportati gli analoghi risultati per la metodologia DFCL.

Dall'analisi dei dati emerge che:

- L'abbassamento della *best estimate* del 20,6%, ottenuto rivalutando i dati al tasso medio del 9% annuo e senza inflazione proiettata, si riduce al 3,8% assumendo un'inflazione futura al 7,5% annuo costante.
- La volatilità dell'inflazione futura, ipotizzata al livello "prudenziale" del 4%, ha l'effetto di aumentare sensibilmente la deviazione standard dei pagamenti futuri (in media del 39,4% nell'ODP e del 39,6% nel DFCL. Ne consegue che il decremento di riserva richiesta si riduce se si fa riferimento ai quantili. Nell'ODP si passa a un abbattimento del 2,3% e dello 0,7% per il 75-esimo e per il 90-esimo percentile, rispettivamente; i corrispondenti abbattimenti per il DFCL sono del 2,6% e dell'1,4%.

Nelle tabelle 5.19 e 5.19 le differenze tra *benchmark* con e senza inflazione sono riportate in valori assoluti sui vari gruppi dimensionali e sull'intero campione. Risulta che l'applicazione del modello con inflazione comporta un risparmio complessivo di 897 milioni di Euro se si definisce il requisito di riserva come *best estimate*. Secondo la metodologia ODP il guadagno scende a 553 e a 173 milioni

⁶Per le caratteristiche specifiche del modello stocastico di inflazione e per i dettagli tecnici di calcolo si rinvia a De Felice, Moriconi 2006 [10].

Tabella 5.17. Modello ODP con inflazione stocastica: differenze rispetto ai valori non inflattivi

(valori percentuali)

<i>n</i>	<i>BE costi correnti</i>	<i>BE con inflazione</i>	<i>Dev. Std. con inflazione</i>	<i>75° percentile con inflazione</i>	<i>90° percentile con inflazione</i>
1	-19,79	-2,89	83,83	-1,11	0,95
2	-18,64	-2,89	57,98	-1,14	0,56
3	-20,01	-3,23	58,49	-1,50	0,38
4	-21,83	-4,83	45,19	-3,35	-1,99
5	-17,82	-3,49	36,83	-2,34	-1,13
6	-21,45	-3,70	51,49	-1,92	-0,30
7	-20,58	-3,22	52,11	-1,51	0,20
8	-16,88	-2,16	44,99	-0,40	1,46
9	-20,51	-3,28	41,01	-1,64	0,24
10	-19,82	-2,74	47,34	-0,79	1,30
11	-21,61	-4,99	23,39	-3,64	-2,76
12	-17,53	-2,34	33,81	-0,98	0,74
13	-23,18	-6,43	26,82	-5,04	-3,59
14	-22,10	-4,62	25,04	-3,47	-1,90
15	-16,67	-1,17	31,16	0,18	1,82
16	-22,71	-6,40	21,27	-5,17	-3,76
17	-23,41	-4,83	22,30	-3,55	-2,36
18	-20,03	-3,40	27,47	-2,05	-0,23
19	-21,26	-2,55	29,04	-0,95	0,71
20	-22,25	-4,82	24,19	-3,28	-1,59
21	-21,84	-3,40	25,64	-1,83	-0,10
22	-21,67	-5,67	17,13	-4,40	-3,05
23	-18,70	-3,32	21,65	-2,01	-0,54
24	-20,58	-4,78	14,93	-3,66	-2,48
25	-22,69	-4,83	16,04	-3,58	-2,35
26	-18,69	-2,85	15,17	-1,82	-0,58
27	-21,13	-5,78	9,63	-4,76	-3,81
28	-25,00	-5,75	12,84	-4,21	-3,25
29	-18,74	-2,09	23,92	-0,70	1,72
30	-17,87	-2,23	23,14	-0,54	1,36
31	-20,81	-3,12	23,96	-0,98	0,82
32	-20,75	-3,62	22,35	-1,68	0,41
33	-18,79	-0,17	20,24	1,35	3,35
34	-22,92	-4,89	8,42	-3,70	-2,82
35	-18,19	-1,73	35,15	1,61	4,58
36	-20,59	-4,61	25,49	-2,33	0,34
37	-19,81	-2,89	12,13	-1,77	-0,15
38	-19,13	-2,56	17,02	-0,60	1,53
39	-21,43	-5,07	8,54	-3,11	-1,66
40	-17,90	0,34	14,28	2,28	4,24
mercato	-20,59	-3,83	39,35	-2,26	-0,68

Tabella 5.18. Modello DFCL con inflazione stocastica: differenze rispetto ai valori non inflattivi

(valori percentuali)

<i>n</i>	<i>BE costi correnti</i>	<i>BE con inflazione</i>	<i>Dev. Std. con inflazione</i>	<i>75° percentile con inflazione</i>	<i>90° percentile con inflazione</i>
1	-19,79	-2,89	75,59	-1,59	-0,33
2	-18,64	-2,89	43,23	-1,74	-0,60
3	-20,01	-3,23	57,57	-1,62	-0,01
4	-21,83	-4,83	51,95	-3,52	-2,22
5	-17,82	-3,49	37,72	-2,60	-1,74
6	-21,45	-3,70	54,44	-2,42	-1,18
7	-20,58	-3,22	58,44	-1,68	-0,15
8	-16,88	-2,16	38,84	-0,97	0,22
9	-20,51	-3,28	34,61	-2,12	-0,96
10	-19,82	-2,74	48,39	-1,24	0,26
11	-21,61	-4,99	35,94	-3,88	-2,78
12	-17,53	-2,34	28,53	-1,28	-0,21
13	-23,18	-6,43	32,47	-5,08	-3,71
14	-22,10	-4,62	28,78	-3,63	-2,64
15	-16,67	-1,17	30,33	-0,05	1,07
16	-22,71	-6,40	21,12	-5,40	-4,38
17	-23,41	-4,83	8,77	-4,16	-3,45
18	-20,03	-3,40	25,46	-2,45	-1,49
19	-21,26	-2,55	32,55	-1,35	-0,15
20	-22,25	-4,82	27,66	-3,71	-2,60
21	-21,84	-3,40	28,03	-2,28	-1,15
22	-21,67	-5,67	17,86	-4,79	-3,89
23	-18,70	-3,32	17,55	-2,41	-1,48
24	-20,58	-4,78	9,09	-4,12	-3,42
25	-22,69	-4,83	17,20	-3,98	-3,12
26	-18,69	-2,85	14,58	-1,90	-0,88
27	-21,13	-5,78	4,23	-5,25	-4,69
28	-25,00	-5,75	9,04	-4,94	-4,07
29	-18,74	-2,09	27,18	-0,92	0,28
30	-17,87	-2,23	19,59	-1,02	0,29
31	-20,81	-3,12	20,41	-2,08	-1,00
32	-20,75	-3,62	31,19	-2,06	-0,42
33	-18,79	-0,17	21,01	0,79	1,79
34	-22,92	-4,89	8,20	-4,24	-3,56
35	-18,19	-1,73	36,16	0,94	4,23
36	-20,59	-4,61	22,32	-2,46	0,30
37	-19,81	-2,89	3,82	-2,28	-1,49
38	-19,13	-2,56	19,49	-1,11	0,56
39	-21,43	-5,07	21,53	-3,59	-1,96
40	-17,90	0,34	18,50	1,41	2,59
mercato	-20,59	-3,83	39,59	-2,60	-1,35

se si sceglie, rispettivamente, il 75-esimo e il 90-esimo percentile; col DFCL i risparmi corrispondenti sono 629 e 337 milioni di Euro.

Tabella 5.19. Modello ODP con inflazione stocastica: effetti sui requisiti di riserva

(importi in milioni di Euro)

Fascia	Riserva di bilancio	<i>best estimate</i> a costi storici	<i>differenze con inflazione</i>		
			<i>best estimate</i>	75° percentile	90° percentile
1	15.114	14.117	-531	-317	-96
2	7.257	7.604	-306	-200	-73
3	1.542	1.556	-57	-35	-6
4	128	136	-3	-1	2
tot. campione	24.042	23.413	-897	-553	-173

Tabella 5.20. Modello DFCL con inflazione stocastica: effetti sui requisiti di riserva

(importi in milioni di Euro)

Fascia	Riserva di bilancio	<i>best estimate</i> a costi storici	<i>differenze con inflazione</i>		
			<i>best estimate</i>	75° percentile	90° percentile
1	15.114	14.117	-531	-360	-181
2	7.257	7.604	-306	-225	-132
3	1.542	1.556	-57	-42	-25
4	128	136	-3	-2	0
tot. campione	24.042	23.413	-897	-629	-337

5.7 Il calcolo del *risk capital* e del *risk margin* secondo i diversi approcci

Nel capitolo 4 è stata considerata una molteplicità di metodi e approssimazioni alternativi al calcolo dei *risk margin* e dei *risk capital*; la rappresentazione formale di questi approcci è stata riassunta in forma tabellare nel paragrafo 4.4.5. Tuttavia, gli esiti dell'analisi empirica descritti in qualche dettaglio nella parte precedente di questo capitolo fanno riferimento solamente a alcuni di questi punti di vista. In questo paragrafo verranno presentati, in forma sintetica, i risultati ottenuti applicando ai dati disponibili sul ramo RCA tutti i metodi e le approssimazioni introdotte nel capitolo 4 ⁷.

Sono state calcolate tutte le voci delle tavole 4.1, 4.2 e 4.3, applicando sia il modello ODP (con simulazione bootstrap) che il DFCL ai triangoli di pagamenti a costi storici di ciascuna delle 40 imprese del campione selezionato. I risultati delle procedure di valutazione sono sintetizzati nelle tabelle 5.21, 5.22 e 5.23, che sono strutturate esattamente nella stessa forma delle tavole definitorie 4.1, 4.2 e 4.3, rispettivamente. Tutti i valori sono espressi in percentuale della corrispondente *best estimate* (BE) non scontata \bar{L} (la stima *chain-ladder* delle OLL). Per ogni voce di calcolo sono riportati i valori della media, della deviazione standard, del minimo e del massimo su tutto il campione.

Un primo risultato empirico generale è che il modello DFCL produce, nel campione, stime di variabilità uniformemente più basse di quelle ricavate col modello ODP; ciò è in accordo col valor medio del coefficiente di variazione di L ottenuto coi due modelli, che è 6,81% per il modello di Mack e 9,03% per l'ODP.

5.7.1 *risk margin* e requisiti di riserva.

Nella tabella 5.21 sono riportati i valori numerici corrispondenti alla tavola 4.1. La *required reserve* (RR) è stata calcolata come 75-esimo e come 90-esimo percentile della *relevant random variable* (RRV), ed è stato ricavato il corrispondente *risk margin* (RM). Si può osservare che i *risk margin* dal 75-esimo percentile nel modello ODP sono il 35÷40 % più alti dei corrispondenti *risk margin* nel DFCL; comunque, in tutti e due i modelli i valori dei *risk margin* mostrano una elevata variabilità nel campione. Inoltre, in ambedue i modelli il livello 100 della *best estimate* non scontata usato come riferimento, risulta compreso tra il minimo e il massimo valore del requisito di riserva calcolato come 75-esimo percentile scontato.

5.7.2 *Risk capital* di riserva, dati i *risk margin*

Nella tabella 5.22 sono raccolti i valori dei *risk capital* di riserva (RC) calcolati dopo aver definito i *risk margin* come α -percentili, con $\alpha = 75\%$ e 90% ; il RAV è stato definito come il percentile della RRV al

⁷Sono state qui aggiunte le valutazioni relative all'approccio scontato secondo il modello DFCL, effettuate utilizzando le espressioni esatte delle correlazione tra le "diagonali" di pagamenti futuri Y_τ fornite in Passalacqua, Vignati 2005 [18]. L'esposizione di questi risultati segue da vicino quella utilizzata in De Felice, Moriconi 2006 [9].

Tabella 5.21. Livelli di *risk margin*, essendo la riserva regolamentare definita come 75-esimo e 90-esimo percentile delle OLL.

(valori percentuali)

		modello ODP				modello di Mack			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RR75	97,7	2,5	94,2	105,2	96,3	2,1	93,4	102,6
	RM75	5,7	2,5	2,1	13,4	4,3	2,0	1,6	10,6
	RR90	103,5	5,4	96,1	120,6	100,6	4,4	95,2	115,0
	RM90	11,5	5,4	4,0	28,9	8,7	4,3	3,1	23,1
φ-dsc	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RR75	97,9	2,6	94,3	105,5	96,3	2,2	93,4	103,1
	RM75	5,9	2,6	2,2	13,7	4,3	2,0	1,6	11,1
	RR90	104,0	5,6	96,2	121,5	100,7	4,5	95,1	116,2
	RM90	12,0	5,6	4,2	29,7	8,7	4,4	3,1	24,2
undsc	BE	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0
	RR75	106,4	2,8	102,4	115,0	104,7	2,2	101,7	112,0
	RM75	6,4	2,8	2,4	15,0	4,7	2,2	1,7	12,0
	RR90	113,0	6,1	104,5	132,4	109,5	4,8	103,3	126,3
	RM90	13,0	6,1	4,5	32,4	9,5	4,8	3,3	26,3

livello di sicurezza del 99,5% (si veda la tavola 4.2). Il *risk loading* del primo anno è stato calcolato avendo specificato la quota di allocazione secondo la (4.49), cioè come $\beta_1 = \bar{Y}_1/M_0$. Analogamente ai *risk margin*, anche per i *risk capital* si riscontra una forte variabilità tra le imprese considerate.

Tabella 5.22. *Risk capital* ricavati come percentile al 99,5%, dati i *risk margin* ricavati come 75-esimo e 90-esimo percentile.

(valori percentuali)

		modello ODP								modello di Mack			
		approccio YEE				approccio LM				approccio LM			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	RAV	121,3	16,2	101,1	174,3	117,1	12,6	100,2	155,2	110,8	10,3	98,4	146,8
	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RC75	27,0	15,4	8,2	78,2	22,8	11,8	7,4	59,1	17,1	9,4	5,7	50,2
	RC90	24,7	14,3	7,4	73,2	20,5	10,6	6,6	54,1	15,3	8,4	5,2	44,9
φ-dsc	RAV	123,1	17,2	101,5	176,9	118,3	13,3	100,6	157,2	111,0	10,7	98,4	150,0
	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RC75	28,9	16,4	8,6	80,8	24,0	12,5	7,7	61,1	17,2	9,8	5,7	53,3
	RC90	26,5	15,2	7,9	75,8	21,7	11,4	7,0	56,1	15,5	8,7	5,1	47,6
undsc	RAV	133,9	18,9	110,3	192,9	128,6	14,7	109,3	171,4	120,6	11,5	106,9	163,1
	BE	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0
	RC75	31,6	17,9	9,4	88,4	26,3	13,7	8,4	66,9	18,8	10,7	6,2	58,2
	RC90	29,2	16,8	8,7	83,3	23,9	12,6	7,7	61,8	17,0	9,6	5,6	52,4
flat	RAV	133,9	18,9	110,3	192,9	128,6	14,7	109,3	171,4	120,6	11,5	106,9	163,1
	BE	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0
	RC	33,9	18,9	10,3	92,9	28,6	14,7	9,3	71,4	20,6	11,5	6,9	63,1

Tabella 5.23. *Risk margin* come costo del capitale ricavato dal percentile al 99,5% (*spread* al 6%).

(valori percentuali)

		modello ODP								modello di Mack			
		approccio YEE				approccio LM				approccio LM			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	RAV	121,3	16,2	101,1	174,3	117,1	12,6	100,2	155,2	110,8	10,3	98,4	146,8
	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RC	27,7	15,4	8,5	78,0	23,7	12,0	7,7	60,0	17,8	9,7	6,0	51,8
	RM	4,4	2,5	1,3	12,8	3,8	2,0	1,2	9,9	2,8	1,5	1,0	8,2
φ -dsc	RAV	123,1	17,2	101,5	176,9	118,3	13,3	100,6	157,2	111,0	10,7	98,4	150,0
	BE	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5	92,0	0,8	90,2	93,5
	RC	29,4	16,3	8,9	80,5	24,8	12,7	8,0	61,8	17,9	10,0	6,0	54,8
	RM	4,7	2,7	1,4	13,3	4,0	2,1	1,3	10,2	2,8	1,6	0,9	8,7
undsc	RAV	133,9	18,9	110,3	192,9	128,6	14,7	109,3	171,4	120,6	11,5	106,9	163,1
	BE	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0
	RC	32,0	17,8	9,7	87,6	27,0	13,8	8,7	67,3	19,5	10,9	6,5	59,5
	RM	5,6	3,2	1,7	15,7	4,7	2,5	1,5	12,1	3,4	1,9	1,1	10,3
flat	RAV	133,9	18,9	110,3	192,9	128,6	14,7	109,3	171,4	120,6	11,5	106,9	163,1
	BE	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0	100,0	100,0
	RC	33,9	18,9	10,3	92,9	28,6	14,7	9,3	71,4	20,6	11,5	6,9	63,1
	RM	5,9	3,4	1,8	16,6	5,0	2,6	1,6	12,8	3,6	2,0	1,2	10,9

5.7.3 *Risk capital* e *risk margin* come costo del capitale.

La tabella 5.23 illustra i risultati dei calcoli di *risk margin* definiti come costo del *reserve risk capital*, secondo le formule raccolte nella tavola 4.3. Anche in questo caso il RAV è stato definito come il percentile al 99,5% della RRV e il *risk premium* per gli *shareholder* è stato posto a un livello di *spread* del 6%. Risulta confermato che con queste ipotesi i *risk margin* calcolati come costo del capitale secondo l'approccio YEE sono non dissimili, ma tipicamente meno elevati dei corrispondenti *risk margin* dal 75-esimo percentile riportati nella tabella 5.21. Per esempio, il RM nel caso scontato ha un valore medio nel campione di 4,4, mentre il corrispondente valore nella tabella 5.21 per RM75 è 5,7; nel campione si ha un valore minimo di 1,3 contro un valore minimo di 2,1, e un valore massimo di 12,8 contro un livello corrispondente di 13,4. La deviazione standard è identica nei due casi. Una analoga relazione di "dominanza" si ha se si confrontano i valori corrispondenti φ -scontati e non scontati.

I dati della tabella confermano anche il risultato generale che, per una data approssimazione (scontata, φ -scontata, non scontata, piatta) le misure di rischio fornite dall'ODP con l'approccio YEE sono tipicamente più alte di quelle fornite dall'ODP con l'approccio LM; queste, a loro volta, sono più elevate di quelle fornite dal modello di Mack nell'approssimazione corrispondente.

Questi risultati possono essere di qualche rilievo nella messa a punto di un adeguato sistema di regolazione del mercato basato sull'uso di modelli interni.

5.8 Un confronto coi requisiti di capitale nei QIS2

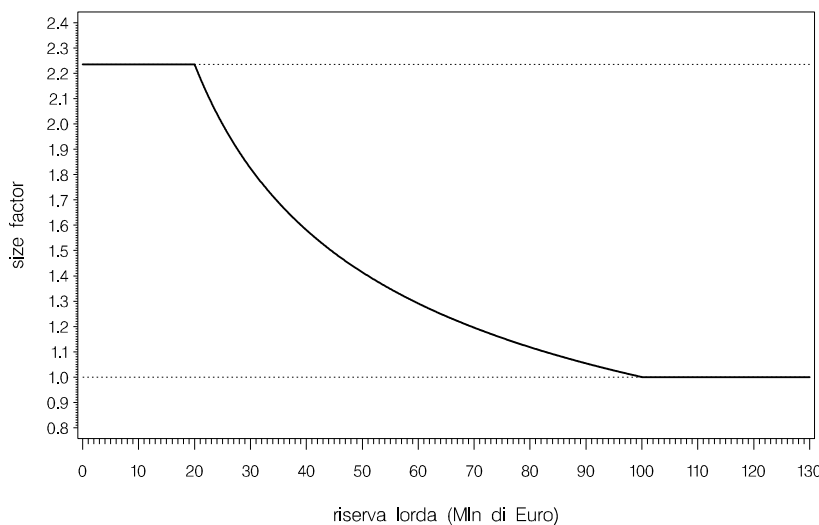
Potrebbe essere interessante effettuare un raffronto tra i livelli di *risk capital* prodotti dall'applicazione dei modelli stocastici e i *solvency capital requirement* (SCR) per il *reserve risk* calcolati secondo le prescrizioni del CEIOPS nel quadro di *Solvency II*. Nelle specifiche tecniche per il secondo studio di impatto quantitativo (QIS2) pubblicate in maggio dal CEIOPS⁸ viene proposto un approccio *factor-based* in cui l'SCR per il *reserve risk* $K^{(QIS)}$ è ricavato seguendo il seguente protocollo.

- a) Vengono definiti 11 rami (*Line of Business*, LoB) per l'assicurazione danni; per ogni ramo k viene specificato un valore "market-wide" per il *fattore di volatilità* f_k .
- b) La *volatilità di ramo* per ogni impresa è calcolata moltiplicando il fattore di volatilità per un *size factor* s_k , cioè:

$$\sigma_k = f_k s_k .$$

Il *size factor* s_k è una funzione non crescente della riserva sinistri R_k^l (*provision for claims outstanding*, PCO) al lordo della riassicurazione. Il fattore dimensionale è uguale a circa 2,236 per valori di riserva lorda minori di 20 milioni di Euro, ha andamento decrescente per riserve fino a 100 milioni ed assume valore costante uguale a 1 per valori di riserva maggiori di 100 milioni. Il grafico di s_k in funzione di R_k^l è riportato nella figura 5.6.

Grafico 5.6. Andamento della funzione *size factor*



- c) La *volatilità per unità di riserva* σ relativa a tutto il comparto danni è ricavata aggregando le

⁸CEIOPS 2006 [6].

volatilità di ramo secondo la formula di covarianza:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_k w_j \sigma_k \sigma_j c_{kj} ,$$

dove:

- $\{c_{kj}\}$ è una specificata matrice di correlazione tra i rami,
- i coefficienti di ponderazione w_k sono espressi dall'incidenza della riserva sinistri (PCO) di ramo R_k (al netto della riassicurazione), rispetto alla riserva complessiva R_{tot} di tutti i rami; cioè come $w_k := R_k/R_{tot}$.

d) Il “*Basic Solvency Capital Requirement*” *BSCR* per il *reserve risk* viene ottenuto come:

$$BSCR = \rho(\sigma) R_{tot} ,$$

dove ρ è una funzione espressa dalla:

$$\rho(x) := \frac{0.99 - N\left(N^{-1}(0.99) - \sqrt{\log(x^2 + 1)}\right)}{0.01} , \quad (5.1)$$

essendo $N(x)$ la funzione di ripartizione normale standard.

e) L'SCR è infine ricavato come:

$$K^{(QIS)} := BSCR - PL ,$$

dove *PL* rappresenta l’“*expected profit or loss arising from next year’s business*”. Come specificato alle pp.20-22 del documento tecnico, i profitti/perdite attesi *PL* sono la somma di una componente PL_{prem} relativa ai premi e di una componente PL_{res} relativa alle riserve. Il contributo PL_{prem} esprime il valore atteso della differenza tra i premi di competenza e i corrispondenti costi (rimborso sinistri e spese) nel prossimo esercizio; il termine PL_{res} è essenzialmente data dalla frazione di *risk margin* allocata nel prossimo anno (proporzionalmente ai livelli di riserva). Pur essendo conteggiate a livello di *business* danni complessivo, queste componenti vengono definite e misurate su ogni singolo ramo.

Nel quadro del QIS2, l’RCA è il ramo $k = 2$ e il corrispondente fattore di volatilità *market-wide* è posto al livello $f_2 = 0,15$. Dato che si considera qui solamente l’RCA, il calcolo dell’SCR è stato effettuato a livello di ramo singolo, saltando il passo (c) (o, ciò che è lo stesso, ponendo $R_k = 0$ per $k \neq 2$) e considerando il valore ottenuto di $K^{(QIS)}$ per l’RCA come un requisito di capitale “*stand-alone*”; anche i profitti/perdite attesi *PL*, quindi, sono stati calcolati per il singolo ramo.

Si può dimostrare facilmente⁹ che l’espressione (5.1) della funzione $\rho(x)$ è quella del *TailVaR* al livello di confidenza del 99% di una variabile aleatoria lognormale con media 1 e deviazione standard

⁹Si veda per es. Castellani, De Felice, Moriconi2005 [4], pp. 383

x. Nel documento tecnico¹⁰ viene esplicitamente proposta l'ipotesi approssimata che il *TailVaR* al 99% rappresenti “*an equivalent level of prudence*” rispetto al *VaR* al 99,5% . Quindi i *risk capital* ricavati dai modelli stocastici possono essere coerentemente confrontati con gli SCR prescritti dal CEIOPS definendo il RAV come un percentile al livello $\alpha = 99,5\%$.

Conformemente alle indicazioni del QIS2, la PCO è stata calcolata come il 75-esimo quantile delle OLL scontate; si è posto cioè:

$$R_2 := \mathbf{Q}^{(75)}(D);$$

il percentile è stato calcolato sulla distribuzione di probabilità ricavata con la metodologia ODP. Per il calcolo dei profitti/perdite attesi la componente di riserva PL_{res} , cioè la frazione di *risk margin* allocata nell'anno $\tau = 1$, è stata ricavata come¹¹:

$$PL_{res} := [\mathbf{Q}^{(75)}(D) - M_0] \frac{\bar{Y}_1}{\bar{L}}.$$

È stata trascurata la componente di profit/loss PL_{prem} , e non si sono considerati gli effetti della riassicurazione, ponendo $\tilde{R}_2 = R_2$.

Nella tabella 5.24 sono raccolti i valori dei *reserve risk capital* del ramo RCA di tutte le 40 compagnie del campione, calcolati sia seguendo il QIS2 che applicando tutti i 12 metodi/approssimazioni descritti in precedenza: approccio scontato, φ -scontato, non-scontato e piatto, sia col metodo YEE che col metodo LM, per il modello ODP; approccio scontato, φ -scontato, non-scontato e piatto, col metodo LM per il DFCL. I *risk capital* prodotti dai modelli stocastici sono stati calcolati prendendo il RAV come il percentile al 99,5% della RRV e i *risk margin* sono stati definiti come costo del capitale (con l'usuale spread del 6%); sono state perciò usate le formule della tavola 4.3.

Come nelle tabelle precedenti, i *risk capital* dei modelli stocastici sono espressi in percentuale di \bar{L} ; i *risk capital* del QIS2 sono espressi in percentuale della riserva di bilancio, il che è lo stesso che riportare il valore (in percento) della funzione ρ . Ancora una volta, le imprese sono ordinate per valore crescente del coefficiente di variazione fornito dal modello ODP.

I dati della tabella 5.24 sono anche illustrati nel grafico 5.7.

I valori di SCR risultano grosso modo uguali per tutte le imprese con livello di riserva superiore ai 100 milioni di Euro (size factor $s_k = 1$), dato che il termine PL , che è l'unico parametro *entity-specific* per queste imprese, ha valore molto basso rispetto al *BSCR*. Per quasi tutte queste compagnie un modello interno basato su uno qualsiasi degli approcci considerati dovrebbe consentire una sensibile riduzione del requisito di capitale rispetto a quanto prescritto dalle specifiche QIS2.

¹⁰CEIOPS 2006 [6], p. 4.

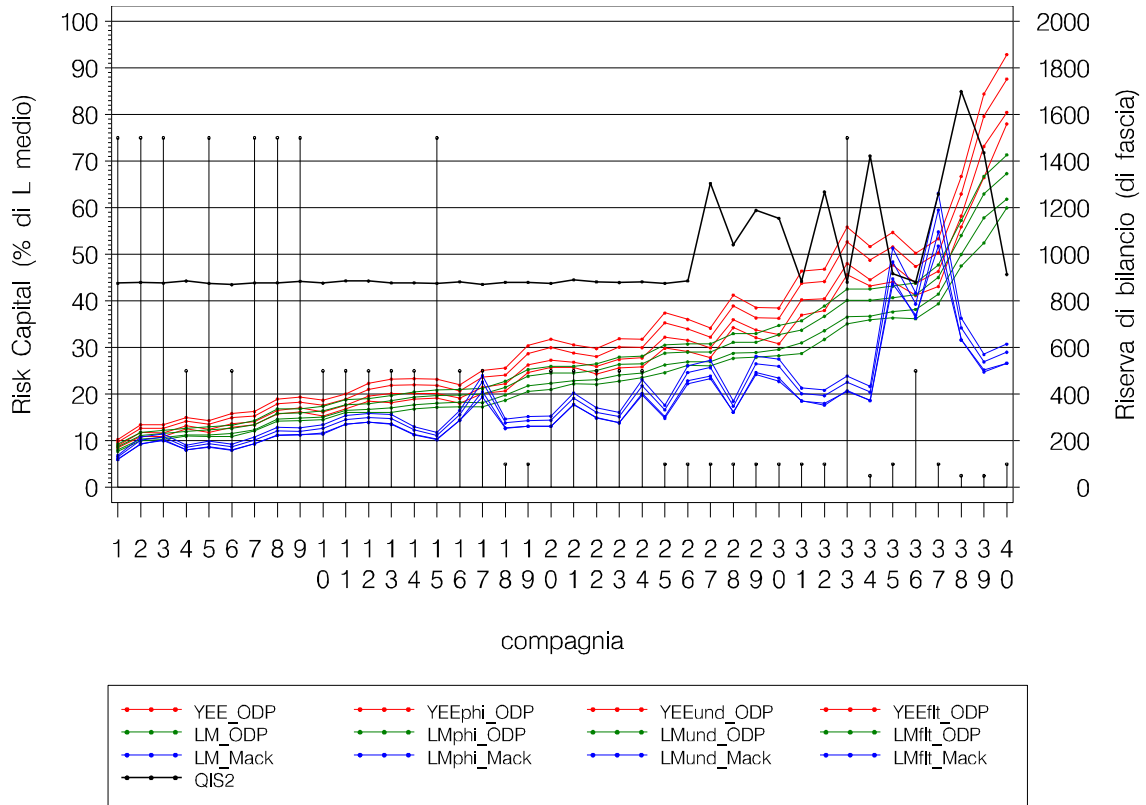
¹¹Questa quantità è molto simile al *risk loading* di primo anno γ_1 definito nel paragrafo 4.3 di questo studio, e specificato dalla regola di allocazione (4.49).

Tabella 5.24. *Risk capital* di riserva in percentuale della *BE* non scontata. Valori QIS2 e da modelli stocastici secondo differenti approcci

(valori percentuali)

<i>n</i>	QIS2	modello ODP								modello di Mack			
		approccio YEE				approccio LM				approccio LM			
		disc	φ -dsc	undsc	flat	disc	φ -dsc	undsc	flat	disc	φ -dsc	undsc	flat
1	43,81	8,49	8,93	9,69	10,27	7,72	8,73	8,05	9,26	6,02	5,97	6,47	6,86
2	44,00	10,92	11,78	12,69	13,45	9,99	11,12	10,32	11,79	9,27	9,42	10,14	10,75
3	43,82	10,91	11,67	12,66	13,42	10,24	11,57	10,67	12,27	10,19	10,00	10,84	11,49
4	44,28	12,56	13,26	14,16	15,01	10,98	11,98	11,22	12,70	7,99	8,02	8,56	9,08
5	43,75	11,75	12,42	13,52	14,33	10,87	12,28	11,28	13,02	8,70	8,56	9,32	9,88
6	43,49	12,89	13,66	14,94	15,84	10,93	12,62	11,53	13,37	8,07	7,98	8,73	9,25
7	43,86	13,39	14,09	15,34	16,26	12,11	13,47	12,38	14,28	9,40	9,31	10,13	10,74
8	43,89	15,76	16,46	17,89	18,96	14,23	15,89	14,62	16,84	11,25	11,17	12,13	12,86
9	44,24	16,16	17,10	18,28	19,38	14,26	15,92	14,89	16,87	11,30	11,25	12,02	12,74
10	43,82	15,25	16,20	17,62	18,68	14,50	16,45	15,11	17,43	11,43	11,68	12,71	13,47
11	44,31	16,83	17,63	18,89	20,03	16,04	17,73	16,55	18,80	13,52	13,58	14,55	15,42
12	44,28	18,53	19,61	21,04	22,30	16,11	17,96	16,74	19,04	13,95	13,97	14,99	15,89
13	43,87	18,14	20,12	21,91	23,23	16,01	18,58	17,06	19,69	13,61	13,50	14,71	15,59
14	43,89	18,96	20,17	22,02	23,34	16,82	19,31	17,69	20,47	11,34	11,27	12,30	13,04
15	43,80	19,18	20,10	21,85	23,16	17,21	19,67	18,09	20,85	10,32	10,21	11,10	11,76
16	44,11	18,01	19,09	20,70	21,94	17,26	19,83	18,29	21,02	14,45	14,39	15,60	16,54
17	43,55	20,11	21,45	23,62	25,04	17,26	19,98	18,14	21,18	19,41	20,54	22,62	23,97
18	44,02	20,72	22,26	24,13	25,58	18,67	21,48	19,81	22,77	12,63	12,76	13,84	14,67
19	43,98	24,63	26,26	28,68	30,40	20,62	23,85	21,83	25,28	13,10	13,12	14,33	15,19
20	43,76	25,71	27,30	29,98	31,78	21,00	24,52	22,33	25,99	13,11	13,11	14,40	15,27
21	44,52	25,69	26,88	28,86	30,59	22,20	24,52	22,84	25,99	17,73	17,79	19,11	20,25
22	44,11	24,36	25,95	28,09	29,78	22,06	25,05	23,13	26,55	14,92	14,87	16,10	17,07
23	43,95	25,62	27,44	30,09	31,89	22,79	26,38	24,06	27,96	13,91	13,83	15,17	16,08
24	44,12	25,86	27,77	29,99	31,79	23,57	26,54	24,58	28,13	19,83	20,18	21,79	23,10
25	43,80	29,86	32,22	35,32	37,43	24,60	28,79	26,26	30,52	14,83	15,17	16,63	17,62
26	44,30	29,19	31,55	33,99	36,03	26,14	29,01	26,92	30,75	22,27	22,86	24,64	26,11
27	65,23	27,81	29,93	32,22	34,15	26,05	29,02	26,96	30,76	23,32	23,87	25,70	27,24
28	52,07	34,26	35,98	38,93	41,27	27,67	31,12	28,76	32,98	16,14	16,11	17,43	18,47
29	59,43	32,12	33,80	36,35	38,53	27,91	31,15	28,97	33,02	24,23	24,66	26,52	28,11
30	57,75	30,83	32,74	36,27	38,45	28,25	32,77	29,58	34,73	22,74	23,44	25,97	27,53
31	44,22	36,99	40,27	43,80	46,43	28,75	33,72	31,00	35,74	18,58	18,48	20,10	21,31
32	63,41	37,97	40,45	44,17	46,82	31,75	36,71	33,62	38,91	17,65	18,01	19,67	20,85
33	44,04	45,62	47,99	52,69	55,85	35,08	40,13	36,56	42,54	20,74	20,54	22,55	23,90
34	71,11	43,20	44,55	48,75	51,67	35,92	40,16	36,70	42,57	18,62	18,67	20,42	21,65
35	45,86	44,10	47,73	51,61	54,71	36,35	40,72	37,66	43,16	43,69	44,76	48,41	51,31
36	44,03	41,18	43,81	47,41	50,25	36,18	41,34	38,20	43,82	36,95	36,34	39,33	41,69
37	62,93	43,08	46,34	50,31	53,33	39,40	45,03	41,48	47,73	51,78	54,82	59,52	63,09
38	84,94	55,90	58,21	62,95	66,72	47,53	54,04	49,98	57,29	31,61	31,65	34,23	36,28
39	71,82	66,47	73,16	79,62	84,40	52,46	62,97	57,86	66,74	25,23	24,74	26,92	28,54
40	45,68	77,99	80,48	87,62	92,87	59,97	67,33	61,85	71,37	26,62	26,64	29,00	30,74

Grafico 5.7. Risk capital di riserva secondo QIS2 e secondo i modelli stocastici – QIS2: *expected shortfall* al 99%; stocastici: ricavati da quantili al 99,5% (RM come CoC, *spread* al 6%)



5.9 Conclusioni

5.9.1 I modelli stocastici

I modelli stocastici ODP con *bootstrapping* e DFCL di Mack, entrambe versioni stocastiche del metodo tradizionale *chain-ladder*, sono risultati applicabili alla maggior parte delle imprese del mercato italiano RCA. Mediante le loro proprietà statistiche, è stata superata la logica attuariale tradizionale della sola stima puntuale della riserva sinistri. Si può concludere che l'impiego di tali metodi per la stima/controllo della riserva sinistri RCA costituisce un significativo progresso rispetto alla *best practice* attuariale corrente, ove prevale ancora un livello di soggettività molto marcato nella applicazione di metodi deterministici, spesso "adattati" alla realtà gestionale dell'impresa.

Sono state comunque osservate, a livello metodologico, delle differenze tra i due metodi stocastici, quali:

- l'ODP si dimostra più prudentiale del DFCL, nel senso che fornisce, a parità di *best estimate*, intervalli di confidenza più ampi e, quindi, riserve sinistri (con il *risk margin* definito come campo di variazione) più elevate. Pertanto possiamo osservare che i *benchmark* di riserva proposti da *Solvency II* (*best estimate* più *risk margin*) risultano avere, per le imprese, un costo regolamentare maggiore se determinati con la metodologia ODP;
- l'ODP con *bootstrapping* richiede un approccio più oneroso dal punto di vista computazionale, ma risulta meglio specificato dal punto di vista statistico; d'altra parte il DFCL consente di effettuare calcoli con formula chiusa, anche se, allo stato attuale di conoscenze, non sono disponibili espressioni per tutte le quantità di interesse;
- l'ODP, fornendo attraverso il *bootstrapping* la distribuzione della aspettativa di riserva, rappresenta il metodo più completo per un corretto approccio al calcolo del requisito di capitale.

È bene precisare che lo studio non rappresenta una specifica raccomandazione per un impiego esclusivo delle due metodologie stocastiche prese in esame. Al momento, tuttavia, esse risultano un riferimento, poiché producono *best estimate* identiche a quelle fornite dal *chain-ladder* deterministico. Deve essere chiaro peraltro che la soggettività del giudizio dell'attuario non è comunque automaticamente eliminata dalla scelta di applicare metodologie stocastiche in luogo di quelle deterministiche. Infatti:

- non esiste un metodo stocastico direttamente applicabile a tutte le situazioni e, più in generale, a tutti i rami assicurativi danni;
- debbono essere opportunamente selezionate le ipotesi sulla distribuzione di probabilità sottostante il metodo stocastico;
- sono soggetti a scelta i dati cui applicare la metodologia stessa (*run-off* dei soli pagamenti, o degli *incurred claims*, ecc.).

A ciò si aggiunge l'aspetto legato alla stabilità e alla sufficienza dei dati (prerequisito indispensabile per l'applicazione di qualsiasi metodo statistico di *claims reserving*).

Tuttavia, come si è potuto constatare anche nello studio, i metodi stocastici per la stima delle OLL hanno il pregio di :

- essere applicati in un *framework* coerente dal punto di vista scientifico;
- essere rigorosi nella procedura di calcolo che, una volta specificata, è ripetibile a fini di controllo da chiunque ne abbia interesse (revisori, vigilanza, *stakeholders*);
- fornire una risposta matematica rigorosa alle domande riguardanti le probabilità e i quantili, specialmente in vista delle nuove modalità di gestione del rischio e dell'approccio all'incertezza che queste richiedono;
- produrre, nell'ambito di questo corretto approccio all'incertezza, distribuzioni empiriche delle OLL separate per anno di accadimento e per *maturity*, e le distribuzioni empiriche delle riserve a costo ultimo "future", ad esempio "tra un anno", separate per anno di accadimento. In particolare, forniscono la distribuzione di probabilità sufficiente per il calcolo del *reserve risk capital*;
- associare automaticamente ai risultati aggregati (ad esempio, la somma delle riserve sinistri delle singole generazioni) i corretti effetti di diversificazione.

Nel valutare punti di forza e di debolezza dei metodi stocastici per la stima delle passività danni emerge ancora che la soggettività pesa comunque sulla scelta del modello stesso e di alcune ipotesi, come accade, nel nostro caso, per il trattamento dei *tail factor* e per il *drift* e la volatilità della *claims inflation*. Tuttavia tale soggettività può essere "limitata" e regolata definendo linee guida di comportamento nell'ambito della scelta di metodi e della stima di determinati parametri, rendendo gestibile e controllabile il processo da parte del *supervisor*.

In effetti l'assenza di metodologie *benchmark* (nel nostro caso stocastiche) implica per la vigilanza attuariale danni un significativo utilizzo di tempo, nel ripercorrere ogni volta metodologie e ipotesi attuariali spesso variate *ad hoc* per ogni caso.

L'ipotesi di prescrivere alle imprese (e quindi agli attuari) dei metodi stocastici, quali *benchmark* per la valutazione della riserva sinistri, appare percorribile anche secondo alcune proposte in discussione presso il CEIOPS.

Qualora si adottasse questa impostazione, l'impresa/revisore/attuario dovrebbe misurarsi prioritariamente con tali metodologie; ricadrebbe inoltre su costoro l'eventuale onere di dimostrare alla vigilanza l'inapplicabilità delle metodologie, concordando con essa metodi e ipotesi di calcolo alternativi.

Si tratta nella sostanza di una svolta nella gestione corretta del rischio di impresa, in linea con quanto richiesto dall'ISVAP stesso alle imprese con la recente circolare 577/D del 30 dicembre 2005 sul controllo interno.

Si osserva, infatti, che seppure lo studio sull'applicabilità delle metodologie stocastiche sia stato limitato al comparto auto, il principio di prescrivere metodi e ipotesi di riferimento rimane valido sia per altri rami danni significativamente a rischio di riserva, sia per le piccole imprese. Infatti eventuali criticità nella applicazione dei metodi, derivanti dalla scarsità dei dati o dalle ipotesi riguardanti la distribuzione di probabilità da impiegare, dovranno anch'esse essere regolamentate dalla vigilanza in modo da promuovere la trasparenza dei modelli e limitare/controllare attraverso "protocolli metodologici" la soggettività comunque ineliminabile nelle valutazioni di bilancio.

5.9.2 Metodi stocastici applicati ai pagamenti a costi correnti

Applicare le tecniche di *loss reserving* ai pagamenti storici equivale a proiettare nei pagamenti attesi l'inflazione di ramo registrata in passato, accettando implicitamente l'ipotesi di una sua ripetibilità in futuro. Se tale ipotesi non è considerata realistica le stime di riserva ottenute risulteranno in genere non accettabili e la stessa modalità di applicazione della metodologia diventa criticabile. Va anche ricordato che, come considerato dal CEIOPS nel *Call for Advice n.2*, l'eventuale applicazione del *discounting* obbliga l'assicuratore ad esplicitare l'inflazione considerata per la stima del costo ultimo.

Nello studio è stato quindi effettuato anche un trattamento separato dell'inflazione (limitatamente al ramo RCA). Per controllare gli effetti sulla variabilità delle riserve stimate, l'andamento dell'inflazione di ramo è stato descritto attraverso un modello anch'esso stocastico; per il fattore inflattivo è stato utilizzato un processo stocastico di tipo lognormale (moto browniano geometrico) caratterizzato da un *trend* di crescita e da una volatilità assegnati.

A tale riguardo i risultati hanno evidenziato che la stima delle riserve effettuata riportando i valori degli importi dei pagamenti storici a valori correnti deflazionandoli secondo l'inflazione del mercato RCA registrata dal 1996-2004 (stimata in media nel 9% annuo) e proiettata per i pagamenti attesi con una ipotesi più contenuta (in media il 7,5% annuo), ha prodotto a livello di *best estimate* una riduzione del 3,8% della analoga stima a costi storici. Trattando il caso limite di assenza di inflazione RCA per il futuro, la *best estimate* si riduce del 20,6% rispetto a quella ottenuta applicando i modelli ai dati a costi storici.

Inoltre:

- la volatilità dell'inflazione futura, ipotizzata al livello "prudenziale" del 4%, ha l'effetto di aumentare sensibilmente la deviazione standard dei pagamenti futuri (in media del 39,4% nell'ODP e del 39,6% nel DFCL) e quindi di aumentare i requisiti di riserva;
- il modello con inflazione stocastica applicato ai dati a costi correnti comporta, rispetto a quello a costi storici, un risparmio complessivo di 897 milioni di Euro se si definisce il requisito di riserva come *best estimate*. Il guadagno si riduce, in base alla metodologia ODP, a 553 e a 173 milioni

di Euro se si sceglie, rispettivamente, il 75-esimo e il 90-esimo percentile (con il DFCL i risparmi corrispondenti sono 629 e 337 milioni di Euro).

Dai risultati conseguono le seguenti considerazioni di carattere generale.

La selezione del tasso futuro dell'inflazione di ramo influisce sensibilmente sulle stime finali e pertanto costituisce un aspetto delicato. Nei modelli stocastici per l'inflazione, la volatilità del processo dei costi può incrementare sensibilmente quella dei pagamenti futuri ottenuta con la tecnica di *loss reserving*, aumentando parallelamente la componente *risk margin* dei requisiti di riserva e quindi i costi regolamentari per le imprese. A livello di vigilanza attuariale, l'ipotesi di ripetibilità futura dell'inflazione storica (o la scelta di un tasso di inflazione verosimile) può essere di fatto oggetto di discussione, al pari di altre variabili di calcolo, con l'impresa/attuario/revisore in fase di controllo della riserva di ogni singola impresa. Al pari delle metodologie, sarebbe pertanto auspicabile che, con le nuove regole, anche determinate ipotesi di calcolo *standard* siano monitorate dalla vigilanza, che le potrebbe indicare periodicamente al mercato (ad es. al pari di quanto avviene per il T.M.O. nei rami vita).

5.10 Il progetto *Solvency II*: il *framework* per la definizione e il calcolo dei requisiti di riserva e del *reserve risk capital*

La definizione di uno schema di riferimento orientato al principio del *fair value* per la quantificazione della riserva sinistri e di una adeguata misura di *reserve risk capital* incontra una serie di difficoltà di ordine concettuale e statistico. È noto infatti che in genere non esistono mercati spessi ed efficienti né per le passività danni, e neanche per contratti a queste assimilabili sui cui prezzi sia possibile calibrare un modello *market consistent* che incorpori il premio per il rischio.

Pertanto, in linea con quanto richiesto dal principio del *fair value*, in questi casi è necessario costruire modelli di mercato che trattino in maniera coerente aspettative e premi per il rischio mediante distribuzioni di probabilità naturali. Queste ultime, come si è visto, sono prodotte dalle metodologie stocastiche di *loss reserving* (nel nostro caso, ODP e Mack con ipotesi di lognormalità).

Il nuovo requisito di riserva (*required reserve*)

In particolare nel progetto *Solvency II*, in assenza di un mercato di riferimento, il nuovo requisito di riserva sinistri è stato definito quale somma della *best estimate* degli impegni in-essere alla fine dell'esercizio e di un esplicito *risk margin* quale premio per il rischio. Tuttavia, mentre l'interpretazione della *best estimate* come valore atteso dei futuri *cash-flow* (valore medio della distribuzione di probabilità naturale appare una definizione in linea con i principi attuariali, per il calcolo del *risk margin* sono stati considerati due metodi alternativi (tecnica del quantile o del costo del capitale);

Per la definizione di un modello che esplicitasse sotto il profilo formale il *risk margin* (e quindi il nuovo requisito di riserva) secondo i due diversi approcci è stato seguito in sintesi il seguente schema logico.

- Si è ipotizzata (come se esistesse un mercato) l'esistenza di un prezzo per un flusso futuro di passività danni il cui *fair value*, per il principio di arbitraggio, è stato definito come il valore attuale delle aspettative su una distribuzione di probabilità *risk neutral*. Queste aspettative considerano implicitamente – per definizione – il *risk loading* di mercato aggiunto a quelle “naturali”.
- È stato quindi definito il valore attuale atteso delle passività utilizzando le probabilità naturali.
- Utilizzando il *fair value* e il valore attuale atteso delle passività è stato esplicitato formalmente il *market value margin* quale differenza tra i due valori.

Ne consegue, in particolare, che il *risk margin* al tempo iniziale risulta pari al valore attuale dei futuri caricamenti per il rischio corrispondenti ad ognuno degli importi residui da corrispondere alle singole scadenze annuali, fino all'estinzione completa della riserva sinistri.

Il *risk capital* di riserva

Conformemente ai principi della *solvency*, il requisito di *risk capital* è soddisfatto considerando un intervallo temporale di riferimento, tipicamente un anno: al tempo zero si calcola il *worst case* (o *Risk-Adjusted Value*, RAV) rispetto agli obblighi dell'assicuratore definiti alla data di chiusura del prossimo bilancio; quindi il processo si itera di anno in anno per tutta la durata delle *liability*.

In particolare l'impegno aleatorio “di primo anno” dell'assicuratore (definito nello studio “valore *cum praestatione*”), è costituito dalla somma di due variabili casuali: la passività relativa ai pagamenti dei sinistri dell'anno in corso e la nuova riserva regolamentare (residua) alla fine dell'esercizio successivo. Nell'ipotesi di *fair valuation* il calcolo del RAV degli impegni di “primo anno” (*cum praestatione*) richiederebbe, in via di principio, la conoscenza della distribuzione *risk neutral* della riserva regolamentare residua, mentre il calcolo del *reserve risk capital* richiede un “metodo misto” che considera sia le probabilità naturali che quelle *risk neutral*.

In assenza di modello robusto di *fair valuation*, è difficile ottenere il calcolo del *reserve risk capital* coerente con la citata impostazione teorica ed è necessario ricorrere a opportune approssimazioni. D'altra parte in molte applicazioni pratiche questa complessità intrinseca del problema del *risk capital* non sembra essere stata pienamente riconosciuta e si riscontrano frequentemente soluzioni numeriche basate su approcci anche fortemente semplificati.

Anche allo scopo di fare ordine nella molteplicità di attacchi pratici al problema del *risk capital* riscontrabili in letteratura, nello studio è stata considerata una varietà di approcci/approssimazioni, caratterizzati da diversi livelli di precisione. In particolare, tenuto conto delle possibilità di calcolo dei

due metodi attuariali stocastici utilizzati, sono state formulate due classi di approssimazioni che si basano:

- sulla variabilità dell'aspettativa di fine anno (approssimazione "Year-End-Expectation", YEE), nella quale la variabile riserva a fine anno (intesa come *fair value cum praestatione*) è sostituita dalla variabile data dal valore scontato, a fine anno *cum praestatione*, delle liability residue;
- sulla variabilità delle liability future (approssimazione "Liability-at-Maturity", LM), nella quale si considera direttamente la variabilità di tutte le *liability future*, considerate alle rispettive scadenze.

Un importante risultato ottenuto, nel passaggio dalla distribuzione *risk neutral* a quella naturale, è che per ottenere la misura del *reserve risk capital*, pari alla differenza tra il RAV e la *best estimate*, bisogna tener conto di un fattore correttivo, pari al *risk loading* attualizzato relativo ai pagamenti del primo anno, evitando così la possibilità di doppi conteggi di capitale.

Pertanto, per determinare il RAV, e quindi il *reserve risk capital*, con le diverse approssimazioni è sufficiente specificare la variabile casuale rilevante per rappresentare le OLL e definire almeno il *risk loading* di primo anno.

5.10.1 Definizioni alternative di *risk margin*

Nello studio sono state considerate le principali classi di *risk margin*, quello definito come percentile della distribuzione delle OLL, e quello come costo del mantenimento del *risk capital* fino all'estinzione delle passività.

La comparazione tra le due definizioni non era tra gli obiettivi dello studio, anche perché entrambi gli approcci presentano vantaggi e svantaggi e dipendono da fattori il cui trattamento deve essere ancora precisato all'interno dello stesso progetto *Solvency II*.

Nel nostro ambito si vogliono esclusivamente sottolineare alcuni significativi risultati di carattere metodologico ottenuti nel caso che il costo del capitale venga impiegato come approssimazione del *risk margin* della riserva:

- con l'approccio del costo del capitale i problemi del requisito di riserva e di capitale si unificano in un singolo (e coerente) problema in quanto, specificati il RAV e lo *spread* (il sovrarendimento richiesto dagli investitori come premio al rischio), il *risk capital* e il *market value margin* (e quindi la riserva richiesta) possono essere determinati simultaneamente superando il cosiddetto problema della circolarità;
- se le definizioni di *risk margin* e di *risk capital* sono tra loro coerenti, per la quantificazione di entrambi, una volta calcolato il RAV della variabile casuale rilevante per le OLL, è sufficiente (sotto le approssimazioni YEE o LM) la specificazione dei pagamenti futuri attesi (le *liability* fornite dal metodo stocastico) e la struttura dei tassi *risk-free* di mercato. Viene meno quindi la necessità di

fissare il *risk loading* per le *liability* di primo anno. Lo *spread* e il RAV possono essere specificati dalla Vigilanza rendendo gestibile operativamente il processo di calcolo.

5.10.2 Il calcolo del *risk capital* e del *risk margin* secondo i diversi approcci

Il calcolo del *risk capital* e del *risk margin* effettuato secondo i due approcci (YEE e LM) è stato effettuato considerando tutte le ipotesi alternative riassunte in forma tabellare nel paragrafo 4.4.5. Dal raffronto tra i risultati è emerso, in generale, che data una approssimazione (non scontata, scontata, φ -scontata e piatta), sia nel caso dei *risk margin* ricavati con la tecnica del quantile (al 75% e al 90%), che in quello come costo del capitale (con RAV fissato al 99,5% e *spread* pari al 6%), le misure di rischiosità fornite dall'ODP con l'approccio YEE sono tipicamente più elevate di quelle fornite dall'ODP con l'approccio LM; queste, a loro volta, sono più elevate di quelle analoghe fornite dal modello di Mack.

La variabilità di questi risultati, oltre ad evidenziare la necessità di una definizione delle grandezze di interesse, nonché di precisare le opportune metodologie di calcolo dei requisiti di rischio, possono essere di qualche rilievo nella messa a punto di un adeguato sistema di regolazione del mercato basato sull'uso di modelli interni.

Al riguardo il raffronto tra i livelli di *risk capital* prodotti dall'applicazione dei modelli stocastici dello studio al ramo RCA – secondo i diversi approcci – ed i *Solvency Capital Requirement* (SCR) per il *reserve risk* calcolati secondo le prescrizioni del CEIOPS – nel secondo studio di impatto quantitativo (QIS2)–, ha evidenziato che i valori di SCR risultano in linea generale uguali per tutte le imprese con livello di riserva sinistri superiore ai 100 milioni di Euro. Per quasi tutte queste imprese, un modello interno, basato su uno qualsiasi degli approcci considerati, dovrebbe consentire una sensibile riduzione del requisito di capitale rispetto a quanto prescritto dalle specifiche QIS2.

5.11 Una sintesi dei risultati sul comparto auto italiano

5.11.1 *Benchmark* non scontati

Analisi del mercato RCA per singola impresa

I risultati evidenziano che nel 2004 il livello implicito di prudenza delle riserve sinistri RCA del mercato (inteso come la somma delle riserve sinistri iscritte in bilancio dalle 40 imprese del campione) risulta in media lievemente più vicino al requisito di riserva che adotta quale *risk margin* il *Cost-of-Capital* (CoC) che a quello in base al 75-esimo percentile. Infatti, se si adottasse uno di tali *benchmark*, le riserve di mercato risulterebbero, in media, inferiori a quella richiesta rispettivamente dell'1,1% (276 milioni di Euro) nel caso del CoC e dell'1,9% (453 milioni di Euro) utilizzando il 75-esimo percentile.

Qualora il requisito di riserva risultasse fissato al 90-esimo percentile le riserve del mercato sarebbero sottostimate del 6,5% (1.562 milioni di Euro).

A livello di singole imprese, 25 sulle 40 imprese del campione non risulterebbero in regola con le riserve al 75-esimo percentile (24 utilizzando come *risk margin* il costo del capitale) e dovrebbero quindi procedere ad una rivalutazione dei propri accantonamenti del 13% (CoC) o del 14% (75-esimo percentile). Per contro, 15 imprese del campione possiedono riserve superiori al 75-esimo percentile (16 imprese se si utilizza come *risk margin* il costo del capitale) e dovrebbero quindi ridurre le proprie riserve sinistri di oltre il 17%.

Analisi del mercato RCA per fasce di imprese

L'analisi del mercato suddiviso in quattro fasce ha confermato, anche a livello aggregato, che il livello implicito di prudenza delle riserve sinistri del 2004 è sostanzialmente pari al 75-esimo percentile. Tuttavia la prima fascia (9 imprese di grandi dimensioni) è risultata allineata al più prudente 90-esimo percentile, la seconda fascia (16 imprese) lievemente al di sotto del 75-esimo, mentre significativamente insufficienti rispetto allo stesso *benchmark* sono risultate la terza e la quarta fascia (rispettivamente del 14% e del 39%). L'analisi aggregata ha messo inoltre in evidenza una sensibile riduzione del coefficiente di variazione medio rispetto alle risultanze del campione (dal 10% circa al 2,9% nel caso ODP), fatto attribuibile in gran parte all'effetto di diversificazione prodotto dall'aggregazione dei triangoli dei dati *run-off* operata per l'elaborazione dei dati per fasce.

Analisi del mercato CVT per fasce di imprese

I risultati hanno evidenziato come nel 2004 il mercato CVT presenti un livello implicito di prudenza delle riserve a costo ultimo superiore dell'8% circa al 95-esimo percentile. Tutte le fasce possiedono riserve sinistri superiori al 75-esimo percentile. In particolare la seconda fascia risulta superiore dell'8% al 95-esimo percentile, la prima sostanzialmente pari al 90-esimo, la terza fascia lievemente inferiore al 90-esimo. La quarta fascia, infine, risulta superiore del 14% al requisito del 95-esimo, ma presenta un elevato grado di variabilità nei risultati.

5.11.2 Benchmark scontati

Il passaggio al *discounting* ha comportato, una riduzione, variabile tra gli 8-8,5 punti percentuali, per i tre *benchmark* di riserva esaminati, e quindi un aumento dello stesso ordine di grandezza delle eccedenze presenti nelle riserve (a costo ultimo) iscritte in bilancio dall'intero ramo RCA nel 2004.

Il livello implicito di riservazione del mercato RCA 2004 passerebbe, in caso di adozione di *benchmark* scontati, dal 75-esimo al 90-esimo percentile.

I risultati hanno per contro evidenziato che le riserve a costo ultimo di 18 imprese su 40 risultano inferiori anche ai *benchmark* scontati al 75-esimo percentile e con il costo del capitale come *risk margin*, e dovrebbero rivalutare i propri accantonamenti dell'11% circa. Tali imprese non sarebbero quindi nella condizione di poter attualizzare le riserve.

Bibliografia

- [1] APRA, *Prudential Standard GPS 210. Liability Valuation for General Insurers*. Australian Prudential Regulation Authority, luglio 2002.
- [2] Buchwalder, M., Bühlmann, H., Merz, M., Wüthrich, M., *Legal Valuation Portfolio in Non-Life Insurance, Proceeding of 36-th Astin Colloquium*, Zurich, settembre 2005.
- [3] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza. Vol. I: Tassi di interesse. Mutui e obbligazioni*, Il Mulino, Bologna, 2005.
- [4] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza. Vol. II: Teoria del portafoglio e del mercato azionario*, Il Mulino, Bologna, 2005.
- [5] CEIOPS, *Technical provision in Non-Life Insurance*, Call for advice n.8, 2 maggio 2005.
- [6] CEIOPS, *Quantitative Impact Study 2. Technical Specification*, CEIOPS-PI-08/06.
- [7] Conference of the Insurance Supervisory Authorities of the Member States of the European Union, *Technical Provisions in Non-Life Insurance*, 2000.
- [8] Chief of Risk Officer Forum, *A market cost of capital approach to market value margins*, Discussion Paper, 17 marzo 2006.
- [9] De Felice, M., Moriconi, F., *Assessing Risk Margins in P&C Loss Reserving*, Presentato al DGVFM Scientific Insurance Day, Cologne, 26 aprile 2006 (in corso di pubblicazione su *Blätter der DGVFM*)
- [10] De Felice, M. Moriconi, F., *Requisiti di riserva e requisiti di capitale nell'assicurazione danni. Un'analisi del mercato italiano RC Auto basata sugli "stochastic claims reserving model"*. Preprint, giugno 2006.
- [11] Faculty of Actuaries, *Claims Reserving Working Party*, 2003.
- [12] Federal Office of Private Insurance, *Withpaper on the Swiss Solvency Test*, 2004.
- [13] Furrer, H., *On the Calculation of the Risk Margin Within the SST*, agosto 2004.
- [14] ISVAP, *Disposizioni in materia di sistema dei controlli interni e gestione dei rischi*, Circolare n. 577/D, 30 dicembre 2005.

- [15] Luder, T., Swiss Solvency Test in Non-Life Insurance, *Proceeding of 36-th ASTIN Colloquium*, Zurich, settembre 2005.
- [16] Mack, T., Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin* **23**, 213-225, 1993.
- [17] Moriconi, F., Towards fair valuation of insurance liabilities. Presentato al workshop *New Mathematical Methods in Risk Theory*, Firenze, 6-8 ottobre 2005
- [18] Passalacqua, L., Vignati, M., *Addendume to "Legal Valuation Portfolio in Non-Life Insurance"* by Buchwalder et al., Preprint, Roma, dicembre 2005.
- [19] Renshaw, A.E., Verral, R.J., A stochastic model underlying the chain ladder technique. *British Actuarial Journal* **4**, 903-923, 1998.