ISTITUTO PER LA VIGILANZA SULLE ASSICURAZIONI

IVASS

Quaderno n. 3

Dal *chain ladder* al modello di Merz e Wüthrich: derivazione completa del modello di volatilità della riserva sinistri in un orizzonte annuale

Stefano Cavastracci

Giugno 2015

(decreto legge 6 luglio 2012 n. 95 convertito con legge 7 agosto 2012 n. 135)

La serie Quaderni *intende promuovere la diffusione di studi e contributi originali sui temi assicurativi al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.*

Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili al solo autore e non impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto.

via del Quirinale 21 – 00187 ROMA
telefono +39 06 42133.1

La serie è disponibile online nel sito www.ivass.it

ISSN 2421-4671 (online)

Dal *chain ladder* al modello di Merz e Wüthrich: derivazione completa del modello di volatilità della riserva sinistri in un orizzonte annuale

di Stefano Cavastracci

ABSTRACT

Il modello di Merz e Wüthrich per la determinazione della volatilità della stima della riserva sinistri nell'orizzonte temporale di un anno, come richiesto dalla normativa Solvency 2, derivato dal *chain ladder* puro, ha riscosso un grande successo, ai fini del calcolo del requisito di capitale inerente al rischio di riservazione, nell'applicazione della standard formula, dei modelli interni e soprattutto degli *undertaking specific parameters* (USP metodo 2 del *reserve risk*). Poiché la pubblicazione definitiva del modello conteneva soltanto risultati senza dimostrazione, quale punto di arrivo di diversi *paper* precedenti, questo documento si prefigge una rielaborazione con finalità divulgative al fine di completare e ricostruire dimostrazioni, nonché correggere formule e imprecisioni, riordinare e armonizzare grandezze e notazioni. L'obbiettivo del modello è la quantificazione dell'incertezza associata allo sviluppo delle riserve sinistri degli esercizi precedenti per il futuro anno di bilancio, il cosiddetto risultato tecnico dello smontamento per l'anno contabile (I, I+1], in inglese *claim development result* (CDR), la cui determinazione ha un impatto diretto sul conto economico e sulla solidità finanziaria di una compagnia assicurativa. Si prevede che il risultato dello sviluppo dei sinistri dell'esercizio contabile (I, I +1] nel conto economico di previsione redatto in I sia nullo e viene analizzata l'incertezza relativa a questa previsione in una visione prospettica, ovvero si risponde alla domanda: "Fino a che punto la realizzazione di tale risultato può deviare da 0?"

Classificazione JEL: C13, G22, M40
Parole Chiave: riserva sinistri, errore di previsione, CDR, *one year view*

Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento va ad Alessandro Costantini per i *check* teorici effettuati e ad Arturo Valerio, Rosa Riccardi e Francesca Gagni per i commenti gentilmente espressi.
Riccardo Cesari, Roberto Roberti e Giuseppa Bentivegna hanno letto una precedente versione e stimolato questa rielaborazione. L'autore è il solo responsabile di quanto contenuto nel presente lavoro.

INDICE

1 INTRODUZIONE

Nel 2008 è stato pubblicato un articolo [4] relativo alla presentazione di un modello per la determinazione della volatilità della stima della riserva sinistri nell'orizzonte temporale di un anno, come richiesto dalla normativa Solvency 2. Il modello, derivato dal *chain ladder* puro, ha riscosso un grande successo, ai fini
del calcolo del requisito di capitale inerente al rischio di riservazione, nell'applicazione della standard formula, degli *undertaking specific parameters* (USP) e dei modelli interni. Poiché tale articolo conteneva massimamente soltanto risultati senza dimostrazione, quale punto di arrivo di diversi *paper* precedenti, questo documento rappresenta una sorta di studio filologico con finalità divulgative -effettuato sui vari articoli - in cui si è cercato di completare e ricostruire dimostrazioni, nonché correggere formule e imprecisioni, riordinare e armonizzare grandezze e notazioni[1]. Peraltro lo stimolo per realizzare tale lavoro è stato indotto da un mio corso rivolto agli attuari dell'IVASS tenutosi nel dicembre 2013.
L'obbiettivo del modello di Merz e Wüthrich è la quantificazione dell'incertezza associata allo sviluppo delle riserve sinistri degli esercizi precedenti per il futuro anno di bilancio. Infatti, si è al tempo I e si valuta il costo ultimo (con le informazioni disponibili in tale istante); in un momento successivo I+1 si effettuerà una nuova previsione con le informazioni aggiornate a questo istante. La differenza tra le due successive previsioni rappresenta il cosiddetto risultato tecnico dello smontamento per l'anno contabile (I, I+1], in inglese *claim development result* (CDR).
La determinazione di questo risultato ha un impatto diretto sul conto economico e sulla solidità finanziaria di una compagnia assicurativa; pertanto, deve essere studiato ai fini di solvibilità.
In termini operativi, nel modello si analizza la previsione del risultato dello sviluppo della riserva sinistri e le possibili fluttuazioni intorno a questa previsione (incertezza della previsione). Fondamentalmente esso risponde a due domande che sono di interesse pratico:

- in generale, si prevede che il risultato dello sviluppo dei sinistri dell'esercizio contabile (I, I +1] nel conto economico previsionale redatto in I sia nullo e viene analizzata l'incertezza relativa a questa previsione. Questa è una visione prospettica: "Fino a che punto la realizzazione di tale risultato può deviare da 0?".
- Nel conto economico effettivo in I+1 si osserva il risultato dello sviluppo sinistri realizzatosi; si analizza se questa osservazione cada in un *range* ragionevole intorno allo 0 o se si tratta di un *outlier*. Questa è una visione retrospettiva e la misura della dispersione può essere altresì scomposta in due componenti: varianza di processo (*process error*) e varianza della stima (*parameter error*).

E' importante confrontare il conto economico previsionale (*budget values*) con il conto economico a consuntivo (*P&L statement*, esempio numerico in tabella 1, tratto da [4]). A sinistra, i valori di bilancio al 1° gennaio, anno I, sono i valori previsti per il prossimo esercizio contabile (I, I+1]. A destra, nel conto economico, si ritrovano gli analoghi valori osservati alla fine dell'esercizio contabile (I, I +1].

[1] In un articolo successivo [6], il modello è stato analizzato e ricavato in un contesto bayesiano, con ipotesi distributive a priori, attraverso un algoritmo ricorsivo, evidenziando come il modello in oggetto, derivato dal chain ladder puro, si posizioni ad un livello inferiore in termini di risultati (a causa delle approssimazioni lineari). Tuttavia rimangono queste le formule utilizzate negli USP e nei modelli interni.

Le voci a) e b) corrispondono alla raccolta premi ed ai corrispondenti risarcimenti; la voce d) corrisponde alle spese di acquisizione, di sede, ecc.; la voce e) corrisponde ai rendimenti finanziari generati dagli investimenti. Tutte queste voci sono in genere ben comprese e previste il 1° gennaio dell'anno I ed osservate al 31 dicembre dello stesso anno I nel conto economico, che descrive la chiusura finanziaria della compagnia per la contabilità dell'anno (I, I +1].
Tuttavia, la voce c), lo smontamento della riserva degli esercizi precedenti è spesso molto meno d'immediata comprensione. Essa corrisponde alla differenza tra le riserve sinistri al tempo t=I e al tempo t=I+1, rettificata per i sinistri pagati nel corso dell'esercizio contabile (I,I+1] per le generazioni degli esercizi precedenti. Nel seguito si indicherà questa voce di risultato dello sviluppo delle generazioni precedenti con il già indicato acronimo CDR. Tale voce è stata esaminata da Merz e Wüthrich nell'ambito del metodo Chain-Ladder (CL) *distribution free* di Mack riletto in [3].

Tabella 1

	budget values at Jan. 1, year I	P&L statement at Dec. 31, year I
a) premiums earned	4'000'000	4'020'000
b) claims incurred current accident year	-3'200'000	-3'240'000
c) loss experience prior accident years	0	-40'000
d) underwriting and other expenses	-1'000'000	-990'000
e) investment income	600'000	610'000
income before taxes	400'000	360'000

Table 1: Income statement, in $ 1'000

2 VISIONE A BREVE TERMINE VS A LUNGO TERMINE

Nella classica letteratura attuariale sulle riserve, comunemente, si studia l'incertezza totale dello sviluppo dei sinistri fino a quando le generazioni a riserva vengano definitivamente liquidate. Per il metodo *chain ladder distribution free,* la teoria è stata formulata da Mack in [1]. Lo studio dell'incertezza totale del *run-off* completo rappresenta la visione a lungo termine: tale visione *"classica"* sulle riserve è molto importante per risolvere questioni di solvibilità e, infatti, quasi tutti i modelli stocastici relativi alle riserve - che sono stati proposti fino ad ora - riflettono questa visione a lungo termine (vedasi [3]).
Tuttavia, il presente lavoro si concentra su una seconda prospettiva importante, la visione a breve termine.
La prospettiva di breve durata caratterizzante Solvency 2 è importante per una serie di motivi:

- se il comportamento a breve termine non è adeguato, la società può semplicemente non arrivare al lungo termine perché sarà dichiarata insolvente prima che ci arrivi realmente;

- una visione a breve termine è rilevante per le decisioni di gestione, in quanto le azioni di management devono essere intraprese sistematicamente. La maggior parte delle decisioni manageriali in una società di assicurazione sono di solito prese su base annua. Per esempio chiusure finanziare, premi assicurativi, regolazioni dei premi, ecc.;
- riflette attraverso i bilanci e le relazioni annuali, la performance di breve termine della società che è di interesse per le autorità di vigilanza, i clienti, gli investitori, le agenzie di rating, i mercati azionari, ecc. Tale risultato, in ultima analisi, avrà un impatto sulla solidità finanziaria e sulla reputazione della società nel mercato assicurativo.

3 METODOLOGIA

3.1 NOTAZIONE

Con riferimento all'anno di generazione (*accident year*) dei sinistri *i* ed all'anno di sviluppo (*development year*) *j*

$$i \in \{0, \ldots, I\} \qquad j \in \{0, \ldots, J\} \qquad\qquad I \geq J$$

vengono definiti reciprocamente i pagamenti cumulati all'anno di sviluppo *j* della generazione ed il costo ultimo od onere finale della generazione nell'orizzonte massimo *J* (quale punto di arrivo) come

$$C_{i,j} \to C_{i,J}$$

nonché la riserva sinistri, come differenza tra costo ultimo e costo cumulato ad un dato momento, all'istante I

$$t = I \quad R_i^I = C_{i,J} - C_{i,I-i} \qquad D_I = \{C_{i,j}; i + j \leq I \quad i \leq I\}$$

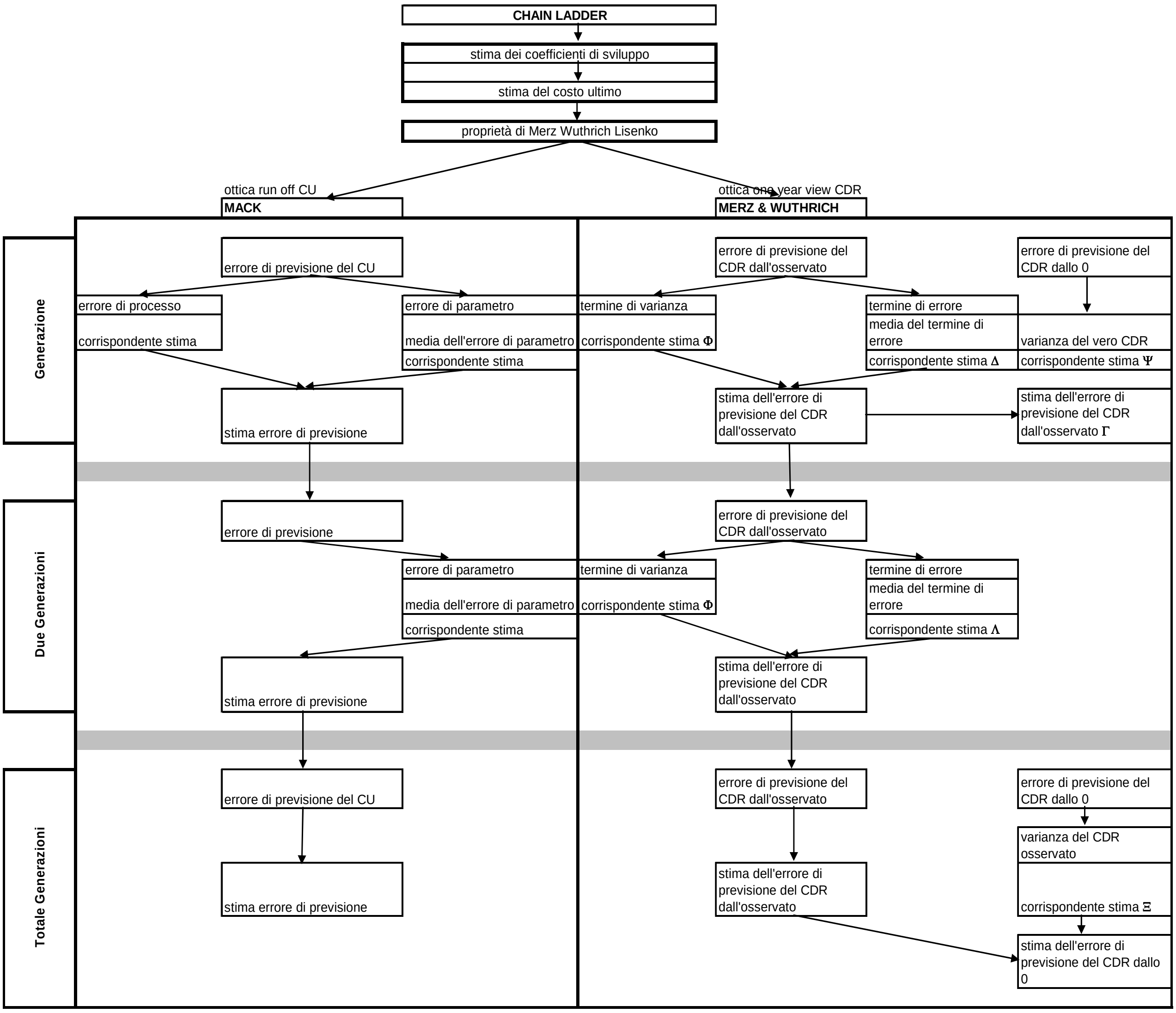
e la riserva sinistri all'istante I+1

$$t = I + 1 \qquad R_i^{I+1} = C_{i,J} - C_{i,I-i+1} \qquad D_{I+1} = \{C_{i,j}; i + j \leq I + 1 \quad i \leq I\}$$

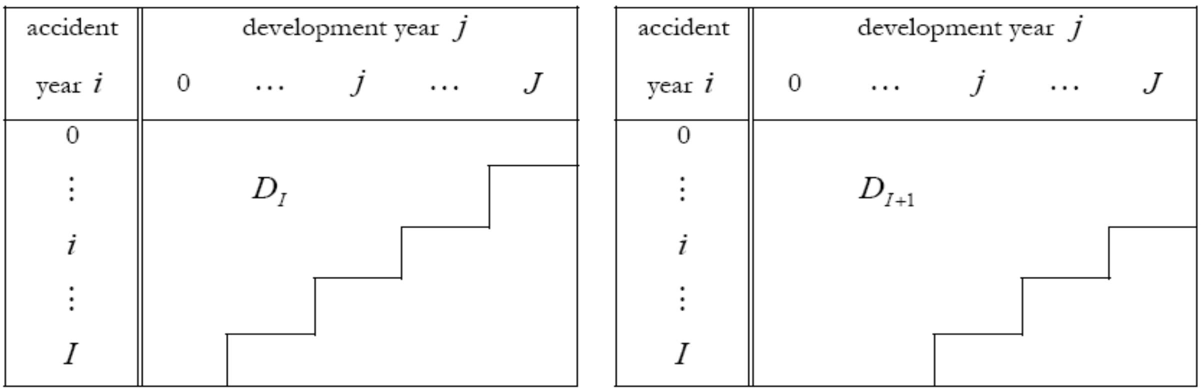
dove D_I e D_{I+1} rappresentano l'informazione sui pagamenti dei sinistri disponibile rispettivamente al tempo I ed I+1.

3.2 CHAIN LADDER

Per migliorare l'esposizione è utile riportare un prospetto sinottico che rappresenta il processo nelle varie fasi di calcolo, in cui è articolato, ed al quale il lettore potrà riferirsi nel corso dell'esposizione. In sintesi: definizione delle ipotesi da cui ottenere le stime del modello deterministico *chain ladder,* nonché dimostrazione di alcune proprietà da cui vengono derivati i principali risultati sulla stima della volatilità delle previsioni sia in termini di *run off* (Mack) sia in ottica di *one year view* (Merz e Wüthrich). Tali risultati sono generati a diversi livelli (per singola generazione o per il totale delle generazioni) e per singole componenti della volatilità di previsione (di processo e di parametro) esponendo, per ciascuna di esse, prima la valutazione e poi la corrispondente stima. Le lettere greche maiuscole richiamano le principali grandezze calcolate. Il lettore potrà consultare il prospetto per comprendere al meglio la struttura articolata delle numerose dimostrazioni presentate nei paragrafi seguenti.



Nella metodologia *chain ladder*, i pagamenti cumulati storici sopra definiti vengono solitamente rappresentati in forma di triangoli superiori dei pagamenti (nello schema che segue in due diversi esercizi successivi[2]):



Passando ad un caso reale, ad esempio per il ramo infortuni di una compagnia italiana all’istante I (esercizio 2011), si riportano i pagamenti incrementali (non cumulati). I dati costituiranno l’input per l’applicazione del modello di Merz e Wüthrich.

---

[2] Esempio didattico per introdurre il modello in oggetto.

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	16.193.554	29.331.871	10.491.448	2.510.130	592.993	181.011	135.452	263.742	117.753
1	15.178.010	30.958.772	10.570.329	2.726.404	463.330	268.518	189.806	77.959	
2	14.428.451	31.045.061	11.252.305	2.694.482	492.171	275.603	246.512		
3	15.726.696	33.022.285	8.690.288	2.272.413	736.397	354.045			
4	16.746.463	32.997.253	7.894.123	2.107.957	714.104				
5	17.851.448	33.189.968	8.097.379	1.814.576					
6	15.726.710	31.161.264	9.203.358						
7	16.691.309	29.092.985							
8	14.680.183								

e in I+1 (es. 2012)

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	16.193.554	29.331.871	10.491.448	2.510.130	592.993	181.011	135.452	263.742	117.753
1	15.178.010	30.958.772	10.570.329	2.726.404	463.330	268.518	189.806	77.959	**128.917**
2	14.428.451	31.045.061	11.252.305	2.694.482	492.171	275.603	246.512	**40.323**	
3	15.726.696	33.022.285	8.690.288	2.272.413	736.397	354.045	**72.453**		
4	16.746.463	32.997.253	7.894.123	2.107.957	714.104	**179.917**			
5	17.851.448	33.189.968	8.097.379	1.814.576	**651.928**				
6	15.726.710	31.161.264	9.203.358	**3.629.709**					
7	16.691.309	29.092.985	**8.136.839**						
8	14.680.183	**28.318.144**							

In termini di risultato tecnico dello smontamento della riserva o CDR nell'anno 2012 si rileva infine

ramo	riserva 2011	pagamenti 2012	riserva 2012	CDR	CDR %
infortuni	77.380.955	41.158.230	29.000.681	7.222.044	9,3%

°°°

Riferendosi alla notazione introdotta vengono ora descritte le ipotesi di base del *chain ladder* per la derivazione, sia del modello in oggetto (*one year view*), sia del modello di Mack (*long term view*) rivisitato nella logica degli autori.

1° IPOTESI DEL MODELLO: INDIPENDENZA DELLE GENERAZIONI

$C_{i,j}$ indipendenti per $i \in \{0,\dots,I\}$

2° IPOTESI DEL MODELLO: RIFORMULAZIONE IN TERMINI DI SERIE STORICA

esistono delle costanti $f_j > 0$ $\sigma_j > 0$ per cui si possano descrivere i pagamenti cumulati

$$C_{i,j} = f_{j-1}C_{i,j-1} + \sigma_{j-1}\sqrt{C_{i,j-1}}\varepsilon_{i,j} \qquad C_{i,0} > 0$$

dove $E[\varepsilon_{i,j}] = 0$ $E[\varepsilon^2_{i,j}] = 1$

le implicazioni della seconda ipotesi riportano alle condizioni in Mack

$$E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1}C_{i,j-1}$$

$$Var(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = \sigma^2_{j-1}C_{i,j-1}$$

Tali ipotesi dovrebbero essere sempre verificate ai fini dell'adattamento con i dati storici sia con opportune analisi grafiche che evidenzino l'indipendenza delle generazioni e le caratteristiche della distribuzione dei residui, sia con un modello di regressione per valutare la significatività dei fattori di sviluppo[3]. Le medesime ipotesi, utilizzando la proprietà *tower* delle aspettative condizionate, consentono di definire il costo ultimo atteso quale

[3] Tali verifiche non costituiscono oggetto di questo documento.

$$E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]=C_{i,I-i}\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j \qquad E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right]=C_{i,I-i+1}\prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j$$

Ciò significa che, laddove i fattori *chain ladder* siano noti, si è in grado di calcolare le aspettative condizionate dei costi ultimi dato il livello d'informazione raggiunta. Tuttavia tali fattori non sono conosciuti e devono essere stimati come rapporti tra somme di pagamenti cumulati a date diverse attraverso gli stimatori seguenti:

STIMATORE DEL COEFFICIENTE DI SVILUPPO AL TEMPO I

$$t=I \quad \hat{f}_j^I=\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^I} \quad \text{dove} \quad S_j^I=\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$$

STIMATORE DEL COEFFICIENTE DI SVILUPPO AL TEMPO I+1

$$t=I+1 \qquad \hat{f}_j^{I+1}=\frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}} \qquad S_j^{I+1}=\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}$$

Le stime effettuate nell'esercizio successivo utilizzano l'incremento dell'informazione sul risultato dello smontamento nell'anno di calendario, compreso tra i due istanti, e sono basate, pertanto, sull'osservazione addizionale che confluisce nel pagamento cumulato dell'ultima diagonale.

Mack ha dimostrato che tali stimatori risultano corretti e incorrelati, per anno di sviluppo, e ai fini della stima del costo ultimo atteso (visto nei due diversi esercizi) vengono impiegati nelle formule:

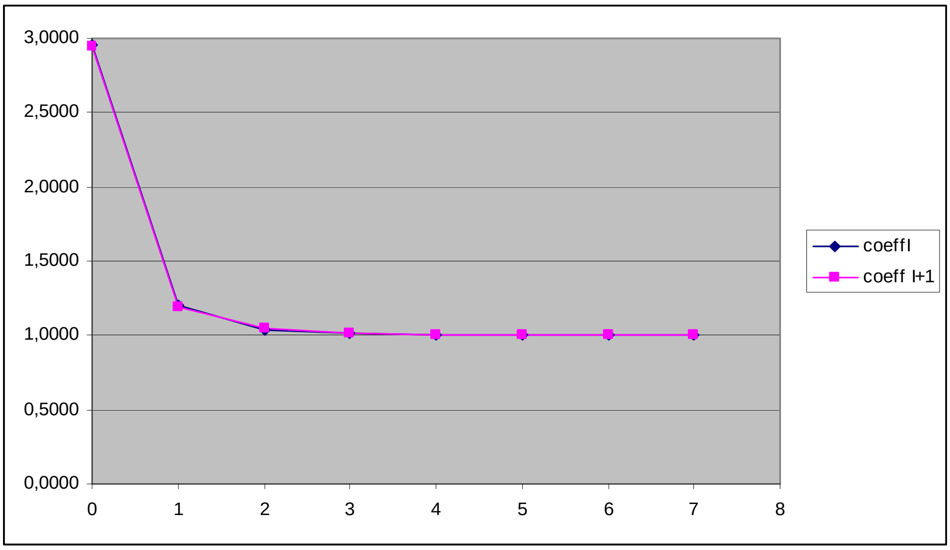
$$\hat{C}_{i,J}^{I}=C_{i,I-i}\hat{f}_{I-i}^{I}\dots\hat{f}_{J-2}^{I}\hat{f}_{J-1}^{I} \quad \text{per} \quad E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]$$

$$\hat{C}_{i,J}^{I+1}=C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i+1}^{I+1}\dots\hat{f}_{J-2}^{I+1}\hat{f}_{J-1}^{I+1} \quad \text{per} \quad E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right]$$

°°°

Si riportano di seguito i coefficienti di sviluppo e le stime di costo ultimo e di riserva per i dati della compagnia selezionata a fini applicativi

0	1	2	3	4	5	6	7	
2,9511	1,1985	1,0411	1,0101	1,0045	1,0032	1,0029	1,0020	$\hat{f}_j^I$
2,9488	1,1960	1,0444	1,0102	1,0042	1,0027	1,0021	1,0021	$\hat{f}_j^{I+1}$



$\hat{C}^{I}_{i,j}$ R^{I}_{i}

1	60.552.327	119.199
2	60.726.514	291.929
3	61.290.272	488.148
4	61.220.059	760.159
5	62.343.296	1.389.925
6	59.728.528	3.637.196
7	58.428.883	12.644.589
8	55.287.425	40.607.242
Totale		59.938.387

$\hat{C}^{I+1}_{i,j}$ R^{I+1}_{i}

1	60.562.045	-
2	60.599.081	124.173
3	61.128.871	254.294
4	61.056.273	416.456
5	62.288.859	683.560
6	60.999.852	1.278.811
7	57.522.003	3.600.870
8	54.858.432	11.860.105
Totale		18.218.269

3.3 LEMMA DI MERZ, WÜTHRICH E LYSENKO - MWL

Di seguito vengono dimostrate le proprietà che verranno utilizzate per dimostrare i risultati che saranno successivamente ottenuti

A) STIMATORI CONDIZIONATAMENTE INDIPENDENTI A D IN I

$C_{i,I-i+1}, \hat{f}^{I+1}_{I-i+1}, \dots, \hat{f}^{I+1}_{J-1}$ indip.

$C_{i,I-i+1} = f_{I-i} C_{i,I-1} + \sigma_{I-i}\sqrt{C_{i,I-1}}\varepsilon_{i,I-i+1}$ è funzione della variabile aleatoria $\varepsilon_{i,I-i+1}$

e per $j \in \{I-i+1, \dots, J-1\}$

$$\hat{f}^{I+1}_{j} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{S^{I+1}_{j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S^{I+1}_{j}} + \frac{C_{I-j,j+1}}{S^{I+1}_{j}} = \frac{S^{I}_{j}}{S^{I+1}_{j}}\hat{f}^{I}_{j} + \frac{f_j C_{I-j,j} + \sigma_j\sqrt{C_{I-j,j}}\varepsilon_{I-j,j+1}}{S^{I+1}_{j}}$$ è funzione della variabile aleatoria $\varepsilon_{I-j,j+1}$ che varia da $\varepsilon_{i-1,I-i+2}$ a $\varepsilon_{I-J+1,J}$

ma per le ipotesi del modello tutte tali variabili sono indipendenti e così si ricava la dimostrazione

B) ESPRESSIONE PER MEDIA CONDIZIONATA AL TEMPO I DEL COEFF. AL TEMPO I+1

$$E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]=\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}+\frac{E\left[C_{I-j,j+1}\middle|D_I\right]}{S_j^{I+1}}=\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}=\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat{f}_j^I+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}$$

c) **ESPRESSIONE PER MEDIA CONDIZIONATA AL TEMPO I DEL COSTO ULTIMO STIMATO AL TEMPO I+1**

$$E\left[\hat{C}_{i,J}^{I+1}\middle|D_I\right]=C_{i,I-i}f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]$$

d) **ESPRESSIONE DELLA MEDIA QUADRATICA CONDIZIONATA AL TEMPO I DEL COSTO ULTIMO**

$$E\left[C_{i,I-i+1}^2\middle|D_I\right]=f_{I-i}^2C_{i,I-i}^2+\sigma_{I-i}^2C_{i,I-i}$$

e) **ESPRESSIONE DELLA MEDIA QUADRATICA CONDIZIONATA AL TEMPO I DEL COEFF. AL TEMPO I+1**

$$E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right]=E\left[\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}+\frac{C_{I-j,j+1}}{S_j^{I+1}}\right)^2\middle|D_I\right]=\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}\right)^2+\frac{E\left[C_{I-j,j+1}^2\middle|D_I\right]}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}+2\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}E\left[C_{I-j,j+1}\middle|D_I\right]=$$

$$=\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}\right)^2+\frac{f_j^2C_{I-j,j}^2+\sigma_j^2C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}+2\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}f_jC_{I-j,j}=\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2+\frac{\sigma_j^2C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}$$

f) **ESPRESSIONE DEL PRODOTTO DI MEDIA CONDIZIONATA AL TEMPO I DEL COEFF. AL TEMPO I+1**

$$E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right]=\frac{1}{S_{I-i}^{I+1}}E\left[C_{i,I-i+1}\sum_{k=0}^{i}C_{k,I-i+1}\middle|D_I\right]=\frac{1}{S_{I-i}^{I+1}}E\left[C_{i,I-i+1}^2\middle|D_I\right]+\frac{1}{S_{I-i}^{I+1}}\sum_{k=0}^{i-1}C_{k,I-i+1}E\left[C_{i,I-i+1}\middle|D_I\right]=$$

$$=\frac{1}{S_{I-i}^{I+1}}\left(f_{I-i}^2C_{i,I-i}^2+\sigma_{I-i}^2C_{i,I-i}+S_{I-i+1}^{I+1}f_{I-i}C_{i,I-i}\right)$$

Viene dimostrata richiamando e ri-indicizzando le seguenti grandezze

$$\hat{f}_j^{I+1}=\frac{\sum_{i=0}^{I-j}C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}\Rightarrow\hat{f}_{I-i}^{I+1}=\frac{\sum_{k=0}^{i}C_{k,I-i+1}}{S_{I-i}^{I+1}}\qquad S_j^{I+1}=\sum_{i=0}^{I-j}C_{i,j}\Rightarrow S_{I-i}^{I+1}=\sum_{k=0}^{i}C_{k,I-i}\qquad S_{I-i+1}^{I+1}=\sum_{k=0}^{i-1}C_{k,I-i+1}$$

°°°

Inoltre, nelle dimostrazioni verrà sovente utilizzata l'approssimazione lineare

$$1>>a_j\qquad\qquad\prod_{j=1}^{J}\left(1+a_j\right)-1\approx\sum_{j=1}^{J}a_j$$

3.4 IL MODELLO DI MACK RIVISITATO

Inizialmente, viene definito l'errore quadratico medio di previsione del costo ultimo condizionato allo stato d'informazione dell'esercizio I. Con *msep* si indica il *mean square error of prediction* che può essere scomposto in *process error* (errore di processo) e in *estimation error* (errore di parametro).

$$msep_{C_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}^I_{i,J}\right)=E\left[\left(C_{i,J}-\hat{C}^I_{i,J}\right)^2|D_I\right]=Var\left(C_{i,J}|D_I\right)+\left(E\left[\left(C_{i,J}\right)D_I\right]-\hat{C}^I_{i,J}\right)^2$$

3.4.1 PROCESS ERROR

Dapprima si ricava un'espressione dell'errore di processo per generazione con procedimento ricorsivo

$$Var\left(C_{i,J}|D_I\right)=Var\left(C_{i,J}|C_{i,I-i}\right)=E\left[Var\left(C_{i,J}|C_{i,J-1}\right)C_{i,I-i}\right]+Var\left(E\left[\left(C_{i,J}|C_{i,J-1}\right)\right]C_{i,I-i}\right)=$$

$$=\sigma^2_{J-1}E\left[C_{i,J-1}|C_{i,I-i}\right]+f^2_{J-1}Var\left(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}\right)=\sigma^2_{J-1}C_{i,I-i}\prod_{l=I-i}^{J-2}f_l+f^2_{J-1}Var\left(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}\right)=$$

$$=C_{i,I-i}\sum_{j=I-i}^{J-1}\prod_{k=j+1}^{J-1}f_k^2\sigma^2_j\prod_{l=I-i}^{j-1}f_l=\sum_{j=I-i}^{J-1}\prod_{k=j+1}^{J-1}f_k^2\sigma^2_jE\left[\left(C_{i,j}|C_{i,I-i}\right)\right]=E\left[\left(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}\right)\right]^2\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\sigma^2_j/f_j^2}{E\left[\left(C_{i,j}|C_{i,I-i}\right)\right]}$$

ed utilizzando lo stimatore del parametro varianza di Mack del coefficiente di sviluppo per antidurata (si veda [3])

$$j\in\{0,\ldots,J-2\}$$

$$\hat{\sigma}^2_j=\frac{1}{I-j-1}\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}-\hat{f}^I_j\right)^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{J-1}=\min\left\{\hat{\sigma}^4_{J-2}/\hat{\sigma}^2_{J-3},\hat{\sigma}^2_{J-3},\hat{\sigma}^2_{J-2}\right\}$$

si ricava la stima dell'errore di processo per generazione

$$V\hat{a}r\left(C_{i,J}|D_I\right)=\left(\hat{C}_{i,J}\right)^2\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}^2_j/\hat{f}^2_j}{\hat{C}_{i,j}}$$

ooo

Nell'esempio didattico le stime della varianza sono le seguenti

0	1	2	3	4	5	6	7
322.516,34	63.122,51	2.718,15	253,61	78,07	49,05	296,33	49,05

3.4.2 ESTIMATION ERROR

Per calcolare l'errore di parametro per generazione, è necessario determinare la fluttuazione degli stimatori dei coefficienti di sviluppo al quadrato intorno ai veri medesimi incogniti coefficienti

$$\hat{f}^2_{I-i},\ldots,\hat{f}^2_{J-1}\qquad f^2_{I-i},\ldots,f^2_{J-1}$$

e ciò viene realizzato specificando la volatilità degli stimatori con la **tecnica del ricampionamento condizionato**: dato lo stato d'informazione in I si genera un insieme di nuove osservazioni

$$Z_{i,j}=f_{j-1}C_{i,j-1}+\sigma_{j-1}\sqrt{C_{i,j-1}}\tilde{\varepsilon}_{ij}$$

che conducono ad un nuovo insieme di realizzazioni per i fattori di sviluppo attesi stimati

$$\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} f_j C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} + \frac{\sigma_j}{S_j^I} \sum_{i=0}^{I-j-1} \sqrt{C_{i,j}}\,\tilde{\varepsilon}_{ij+1} = f_j + \frac{\sigma_j}{S_j^I} \sum_{i=0}^{I-j-1} \sqrt{C_{i,j}}\,\tilde{\varepsilon}_{ij+1}$$

A differenza delle osservazioni iniziali sui pagamenti cumulati, le nuove osservazioni e le realizzazioni dei coefficienti di sviluppo sono variabili aleatorie; inoltre le osservazioni iniziali sono incondizionatamente indipendenti da $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ cosi da poter soddisfare le seguenti proprietà per le nuove realizzazioni con rapidi calcoli:

$\hat{f}_0^I \ldots \hat{f}_{J-1}^I$ indipendenti condizionatamente a D_i

$$E\left[\hat{f}_{j-1}^I \middle| D_I\right] = f_{j-1}$$

$$Var\left(\hat{f}_{j-1}^I \middle| D_I\right) = \frac{\sigma_{j-1}^2}{S_{j-1}^I}$$

Con tali elementi si riesce a calcolare una media dell'errore di parametro

$$E\left[\left(E\left[(C_{i,J})|D_I\right] - \hat{C}_{i,J}^I\right)^2 \middle| D_I\right] = E\left[C_{I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\hat{f}_j^I\right)^2 + \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 - 2\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}_j^I \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j\right) \middle| D_I\right] =$$

$$= C_{I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^I\right)^2 \middle| D_I\right] + \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 - 2\prod_{j=I-i}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^I \middle| D_I\right]\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j\right) = C_{I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2}{S_j^I} + f_j^2\right) + \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 - 2\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j\right) =$$

$$= C_{I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2}{S_j^I} + f_j^2\right) - \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2\right) = C_{I-i}^2 \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2 / f_j^2}{S_j^I} + 1\right) - 1\right) \approx C_{I-i}^2 \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2 / f_j^2}{S_j^I}$$

sostituendo con gli stimatori si ricava la stima dell'errore di parametro per generazione

$$\hat{E}\left[\left(E\left[(C_{i,J})|D_I\right] - \hat{C}_{i,J}^I\right)^2 \middle| D_I\right] \approx \hat{C}_{i,J}^I \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}$$

ed infine la stima dell'errore quadratico medio per generazione

$$m\hat{s}ep_{\hat{C}_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}_{i,J}\right) = \hat{C}_{i,J}^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\left(\hat{f}_j^I\right)^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{S_j^I}\right)$$

3.4.3 TOTALE GENERAZIONI

Per determinare l'errore quadratico medio complessivo è importante calcolare preliminarmente quello tra due generazioni con $k > i$

$$msep_{C_{i,J}+C_{k,J}|D_I}\left(\hat{C}_{i,J}^I + \hat{C}_{k,J}^I\right) = E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^I + \hat{C}_{k,J}^I - \left(C_{i,J} + C_{k,J}\right)\right)^2 \middle| D_I\right] =$$

$$= Var\left(C_{i,J} + C_{k,J} \middle| D_I\right) + \left(\hat{C}_{i,J}^I + \hat{C}_{k,J}^I - E\left[C_{i,J} + C_{k,J} \middle| D_I\right]\right)^2 =$$

$$= Var\left(C_{i,J} \middle| D_I\right) + Var\left(C_{k,J} \middle| D_I\right) + \left(\hat{C}_{i,J}^I - E\left[C_{i,J} \middle| D_I\right]\right)^2 + \left(\hat{C}_{k,J}^I - E\left[C_{k,J} \middle| D_I\right]\right)^2 + 2\left(\hat{C}_{i,J}^I - E\left[C_{i,J} \middle| D_I\right]\right)\left(\hat{C}_{k,J}^I - E\left[C_{k,J} \middle| D_I\right]\right) =$$

$$= E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^I - C_{i,J}\right)^2 \middle| D_I\right] + E\left[\left(\hat{C}_{k,J}^I - C_{k,J}\right)^2 \middle| D_I\right] + 2\left(\hat{C}_{i,J}^I - E\left[C_{i,J} \middle| D_I\right]\right)\left(\hat{C}_{k,J}^I - E\left[C_{k,J} \middle| D_I\right]\right) =$$

$$= msep_{C_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}_{i,J}^I\right) + msep_{C_{k,J}|D_I}\left(\hat{C}_{k,J}^I\right) + 2\left(\hat{C}_{i,J}^I - E\left[C_{i,J} \middle| D_I\right]\right)\left(\hat{C}_{k,J}^I - E\left[C_{k,J} \middle| D_I\right]\right)$$

Pertanto si calcola l'ultimo termine o errore di parametro tra due generazioni, sempre utilizzando i risultati della tecnica di ricampionamento condizionato.

$$E\left[\left(\hat{C}^I_{i,J}-E\left[C_{i,J}|D_I\right]\right)\left(\hat{C}^I_{k,J}-E\left[C_{k,J}|D_I\right]\right)|D_I\right]=E\left[\left(C_{I-i}\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\right)\right)\left(C_{I-k}\left(\prod_{j=I-k}^{J-1}\hat{f}^I_j-\prod_{j=I-k}^{J-1}f_j\right)\right)|D_I\right]=$$

$$=C_{I-i}C_{I-k}E\left[\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j\prod_{j=I-k}^{J-1}\hat{f}^I_j-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\prod_{j=I-k}^{J-1}\hat{f}^I_j-\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j\prod_{j=I-k}^{J-1}f_j+\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\prod_{j=I-k}^{J-1}f_j|D_I\right]=$$

$$=C_{I-i}C_{I-k}E\left[\prod_{j=I-k}^{I-i-1}\hat{f}^I_j\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\hat{f}^I_j\right)^2-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j\right)+\prod_{j=I-k}^{I-i-1}f_j\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2-\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\right)|D_I\right]=$$

il secondo termine viene eliminato

$$=C_{I-i}C_{I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}E\left[\hat{f}^I_j|D_I\right]\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}E\left[\left(\hat{f}^I_j\right)^2|D_I\right]-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j\prod_{j=I-i}^{J-1}E\left[\hat{f}^I_j|D_I\right]\right)=$$

$$=C_{I-i}C_{I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}f_j\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}E\left[\left(\hat{f}^I_j\right)^2|D_I\right]-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\right)=C_{I-i}C_{I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}f_j\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(f_j^2+\frac{\sigma^2_j}{S^I_j}\right)-\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\right)=$$

$$=C_{I-i}C_{I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}f_j\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(1+\frac{\sigma^2_j/f_j^2}{S^I_j}\right)-1\right)\approx C_{I-i}C_{I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}f_j\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\sigma^2_j/f_j^2}{S^I_j}$$

sostituendo con gli stimatori si ricava la stima dell'errore di parametro tra due generazioni

$$\hat{E}\left[\left(\hat{C}^I_{i,J}-E\left[C_{i,J}|D_I\right]\right)\left(\hat{C}^I_{k,J}-E\left[C_{k,J}|D_I\right]\right)|D_I\right]=\hat{C}^I_{i,J}\hat{C}^I_{k,J}\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}^2_j/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{S^I_j}$$

ed infine la stima dell'errore quadratico medio totale o la famosa formula di Mack

$$msep_{\sum_{i=1}^{J}C_{i,J}|D_I}\left(\sum_{i=1}^{J}\hat{C}^I_{i,J}\right)=\sum_{i=1}^{J}m\hat{s}ep_{C_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}^I_{i,J}\right)+2\sum_{k>i}\hat{C}^I_{i,J}\hat{C}^I_{k,J}\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}^2_j/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{S^I_j}$$

3.5 CLAIM DEVELOPMENT RESULT

Si definisce come vero saldo tecnico per una generazione sinistri di un esercizio precedente la differenza delle aspettative di costo ultimo condizionate allo stato informativo di due esercizi successivi

siano $i\in\{1,\ldots,I\}$ $(I,I+1]$

$$CDR_i(I+1)=E\left[R_i^I|D_I\right]-\left(X_{i,I-i+1}+E\left[R_i^{I+1}|D_{I+1}\right]\right)=E\left[C_{i,J}|D_I\right]-E\left[C_{i,J}|D_{I+1}\right]$$

dove $X_{i,I-i+1}=C_{i,I-i+1}-C_{i,I-i}$ sono i pagamenti incrementali

per la proprietà di martingala risulta $E\left[CDR_i(I+1)|D_I\right]=0$ ovvero il *run off* atteso è nullo in I; aspetto che intuitivamente si dà per scontato.

La variabilità sul CDR di generazione può essere facilmente calcolata

$$Var\left(CDR_i(I+1)|D_I\right)=Var\left(E\left[C_{i,J}|D_I\right]-E\left[C_{i,J}|D_{I+1}\right]\right)=Var\left(E\left[C_{i,J}|D_{I+1}\right]\right)=\prod_{j=I-i+1}^{J-1}f_j^2Var\left(C_{i,I-i+1}|D_I\right)=$$

$$=\sigma^2_{I-i}C_{i,I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}f_j^2=E\left[C_{i,J}|D_I\right]^2\frac{\sigma^2_{I-i}/f^2_{I-i}}{C_{i,I-i}}$$

la somma del vero saldo tecnico del totale generazioni e di conseguenza la rispettiva volatilità si ottengono così

$$\sum_{I=1}^{I} CDR_i(I+1)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1)\middle|D_I\right) = \sum_{i=1}^{I} E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 / f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}$$

In realtà non essendo noti i valori si può soltanto – sostituendo i coefficienti con i loro stimatori – riscontrare, ex post, il saldo tecnico osservato per generazione sia in termini di stima di riserva sia in termini di costo ultimo

siano $\quad i \in \{1,\ldots,I\} \quad (I, I+1]$

$$C\hat{D}R_i(I+1) = \hat{R}_i^{D_I} - \left(X_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{D_{I+1}}\right) = \hat{C}_{i,J}^{I} - \hat{C}_{i,J}^{I+1}$$

$$\hat{R}_i^{D_I} = \hat{C}_{i,J}^{I} - C_{i,I-i} \qquad \hat{R}_i^{D_{I+1}} = \hat{C}_{i,J}^{I+1} - C_{i,I-i+1}$$

Si scrive $\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)$ per tutte le generazioni di sinistro

Sono due le quantità, per generazione e in aggregato (come si vedrà dopo), che sono necessarie da calcolare (si veda paragrafo 1): l'errore quadratico medio di previsione del saldo osservato dal saldo vero per misurare la qualità dell'approssimazione (ottica retrospettiva)

$$msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) = E\left[\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right]$$

e, più importante, l'errore quadratico medio di previsione dello stimatore dal saldo nullo per misurare la qualità della previsione (ottica prospettica Solvency 2)

$$msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = E\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) - 0\right)^2 \middle| D_I\right]$$

3.6 ERRORE QUADRATICO MEDIO DI PREVISIONE PER GENERAZIONE

3.6.1 EMPIRICAL VIEW

Nell'ottica retrospettiva si ricava

$$msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) = E\left[\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right] =$$

$$= Var\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right) + E\left[\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right)\middle|D_I\right]^2 = \varphi_{i,J}^{I} + E\left[C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right]^2$$

Si deriva il primo termine dell'errore quadratico medio di previsione del saldo osservato: *process error* o termine di varianza

$$\varphi_{i,J}^{I} = Var\left(CDR_i(I+1)\middle|D_I\right) + Var\left(C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right) - 2Cov\left(CDR_i(I+1), C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right)$$

Il *process error* della generazione non estinta meno recente è nullo

$$\varphi_{1,J}^{I} = Var\left(CDR_1(I+1) - C\hat{D}R_1(I+1)\middle|D_I\right) = Var\left(E\left[C_{1,J}\middle|D_{I+1}\right] - \hat{C}_{i,j}^{I+1}\middle|D_I\right) = Var\left(C_{1,J} - C_{1,J}\middle|D_I\right) = 0$$

Il *process error* delle altre generazioni si ricava di seguito sfruttando la formula già dimostrata per la volatilità del saldo vero e le proprietà A) e D) del lemma MWL

$$\varphi_{i,J}^{I} = E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 \big/ f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} + Var\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1}\middle|D_I\right) - 2Cov\left(E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right], \hat{C}_{i,J}^{I+1}\middle|D_I\right) =$$

$$= E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 \big/ f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} + \left(E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - E\left[\hat{C}_{i,J}^{I+1}\middle|D_I\right]^2 \right) - 2Cov\left(C_{i,I-i+1} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j , C_{i,I-i+1} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I \right) =$$

$$= E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 \big/ f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} + \left(E\left[C_{i,I-i+1}^2\middle|D_I\right] \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - E\left[C_{i,I-i+1}\middle|D_I\right]^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]^2 \right) -$$

$$+ 2\left(Var\left(C_{i,I-i+1}\middle|D_I\right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \right) =$$

$$= E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 \big/ f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} + \left(\left(f_{I-i}^2 C_{i,I-i}^2 + \sigma_{I-i}^2 C_{i,I-i}\right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - f_{I-i}^2 C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]^2 \right) -$$

$$+ 2\left(\sigma_{I-i}^2 C_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \right) =$$

$$= E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2 \big/ f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} + f_{I-i}^2 C_{i,I-i}^2 Var\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} \hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I \right) + \sigma_{I-i}^2 C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - 2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \right)$$

a questo punto utilizzando le proprietà B) ed E) del Lemma MWL è possibile ottenere delle stime dei momenti condizionati ad I del coefficiente al tempo I+1

$$\hat{E}\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] = \hat{f}_j^{I}$$

$$\hat{E}\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] = \left(\hat{f}_j^{I}\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}_j^2 C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}$$

$$V\hat{a}r\left(\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right) = \frac{\hat{\sigma}_j^2 C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}$$

Sostituendo queste nelle formule - oltre alle stime dei fattori e delle varianza al tempo I - è possibile stimare l’errore precedente

Inoltre, si tenga anche conto del criterio di approssimazione, da questa dimostrazione in poi considerando $\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 \big/ \left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}} << 1$ $\qquad \frac{\hat{\sigma}_j^2 \big/ \left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{C_{I-j,j}} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 << 1$

$$
\begin{aligned}
&\hat{\varphi}^I_{i,J} = \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} + \left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} + \hat{\sigma}^2_{I-i} C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\left(\hat{f}^I_j\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} \right) - 2\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} \hat{f}^I_j \right)^2 \right) \\
&\pm \left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\hat{f}^I_j\right)^2 = \\
&= \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} + \left(\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} + \hat{\sigma}^2_{I-i} C_{i,I-i} \right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\left(\hat{f}^I_j\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} \right) - 2\left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} - \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 = \\
&= \left(\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} + \hat{\sigma}^2_{I-i} C_{i,I-i} \right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\left(\hat{f}^I_j\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} \right) - \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} \right) = \\
&= \left(\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} + \hat{\sigma}^2_{I-i} C_{i,I-i} \right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\hat{f}^I_j\right)^2 \left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} C_{I-j,j} \right) - \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} \right) = \\
&= \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \left[1 + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{C_{i,I-i}} \right] \left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} C_{I-j,j} \right) - 1 \right) \approx \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{C_{I-j,j}} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j} \right)^2 = \left(\hat{C}^I_{i,J}\right)^2 \hat{\Phi}^I_{i,J}
\end{aligned}
$$

Il secondo termine da calcolare è *l'estimation error* o più propriamente il termine di errore. Avvalendosi anche in questo caso della tecnica di ricampionamento condizionato, dapprima si calcola la seguente con l'ausilio delle proprietà B) e C) del Lemma MWL

$$
E\left[C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right] = E\left[\hat{C}^I_{i,J} - \hat{C}^{I+1}_{i,J}\middle|D_I\right] = C_{i,I-i}\left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}^I_j - f_{I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}^{I+1}_j\middle|D_I\right] \right) =
$$

$$
= C_{i,I-i}\left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}^I_j - f_{I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{S^I_j}{S^{I+1}_j} \hat{f}^I_j + f_j \frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j} \right) \right)
$$

Dopodiché utilizzando i risultati di detta tecnica e le sostituzioni successive si media il termine di errore

$$
\alpha_j = \frac{S^I_j}{S^{I+1}_j} \in [0,1] \qquad\qquad f_j \frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j} = \frac{f_j S^{I+1}_j - f_j S^I_j}{S^{I+1}_j}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[E\left[C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right]^2|D_I\right]=C_{i,I-i}^2E\left[\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}_j^I-f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat{f}_j^I+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)\right)^2|D_I\right]=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}E\left[\left(\hat{f}_j^I\right)^2|D_I\right]+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}E\left[\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat{f}_j^I+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2|D_I\right]-2E\left[\hat{f}_{I-i}^I f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^I\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat{f}_j^I+f_j\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)|D_I\right]\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(Var\left(\hat{f}_j^I|D_I\right)+f_j^2\right)+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}E\left[\left(\alpha_j\hat{f}_j^I+(1-\alpha_j)f_j\right)^2|D_I\right]-2E\left[\hat{f}_{I-i}^I f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^I\left(\alpha_j\hat{f}_j^I+(1-\alpha_j)f_j\right)|D_I\right]\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(Var\left(\hat{f}_j^I|D_I\right)+f_j^2\right)+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}E\left[\left(\alpha_j\left(\hat{f}_j^I-f_j\right)+f_j\right)^2|D_I\right]-2E\left[\hat{f}_{I-i}^I f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^I\left(\alpha_j\left(\hat{f}_j^I-f_j\right)+f_j\right)|D_I\right]\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(Var\left(\hat{f}_j^I|D_I\right)+f_j^2\right)+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_j^2Var\left(\hat{f}_j^I|D_I\right)+f_j^2\right)-2f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_jVar\left(\hat{f}_j^I|D_I\right)+f_j^2\right)\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right)+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_j^2\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right)-2f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_j\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right)\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\left(\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)+f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}f_j^2\left(\alpha_j^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)-2f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}f_j^2\left(\alpha_j\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)\right)=\\
&=C_{i,I-i}^2\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)+\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_j^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)-2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\alpha_j\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)\right)\approx\\
&\approx C_{i,I-i}^2\prod_{j=I-i}^{J-1}f_j^2\left(\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\left[\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\alpha_j^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1-2\left(\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\alpha_j\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)\right]\right)=\\
&=\hat{C}_{i,J}^2\left(\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\left[\sum_{j=I-i+1}^{J-1}(1-\alpha_j)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right]\right)=\hat{C}_{i,J}^2\left(\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\left[\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right]\right)
\end{aligned}
$$

ed infine si ottiene la stima

$$\hat{E}\left[E\left[C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right]^2|D_I\right]=\hat{C}_{i,J}^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^I\right)^2}{S_{I-i}^I}+\left[\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}\right]\right)=\hat{C}_{i,J}^2\hat{\Delta}_{i,J}^I$$

Cosi da ottenere la stima dell'errore quadratico medio di previsione del saldo osservato per generazione

$$ms\hat{e}p_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right)=\left(\hat{C}_{i,J}^I\right)^2\left(\hat{\Phi}_{i,J}^I+\hat{\Delta}_{i,J}^I\right)$$

3.6.2 PERSPECTIVE VIEW

L'errore quadratico medio di previsione dello stimatore dal saldo nullo si ottiene in funzione dei risultati precedenti con la seguente scomposizione

$$msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = E\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) - 0\right)^2 \middle| D_I\right] = E\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) \pm CDR_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right] =$$
$$= E\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) - CDR_i(I+1) + CDR_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right] = msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) + E\left[CDR_i(I+1)^2 \middle| D_I\right] =$$
$$= msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) + Var\left(CDR_i(I+1)|D_I\right) + E\left[CDR_i(I+1)|D_I\right]^2 =$$
$$= msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) + Var\left(CDR_i(I+1)|D_I\right)$$

e stimando la varianza del vero saldo tecnico

$$V\hat{a}r\left(CDR_i(I+1)|D_I\right) = \hat{C}_{i,J}^2 \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 \Big/ \left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}} = \hat{C}_{i,J}^2 \hat{\Psi}_i^I$$

si calcola la stima dell'errore quadratico medio di previsione dal saldo 0

$$m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = \left(\hat{C}_{i,J}^I\right)^2 \left(\hat{\Phi}_{i,J}^I + \hat{\Delta}_{i,J}^I + \hat{\Psi}_i^I\right) = \left(\hat{C}_{i,J}^I\right)^2 \left(\hat{\Delta}_{i,J}^I + \hat{\Gamma}_{i,J}^I\right)$$

3.7 Errore quadratico medio di previsione per totale generazioni

Nella finalità di aggregazione delle generazioni sinistri si formula altresì sia l'errore quadratico medio di previsione dal saldo vero per misurare la qualità dell'approssimazione (ottica retrospettiva)

$$msep_{\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)\right) = E\left[\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1) - \sum_{I=1}^{I} CDR_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right]$$

sia l'errore quadratico medio di previsione dal saldo 0 per la qualità della previsione (ottica prospettica Solvency 2)

$$msep_{\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = E\left[\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right]$$

3.7.1 Empirical view

Inizialmente si deve valutare la correlazione tra le stime di generazione in quanto gli stimatori dei coefficienti di sviluppo vengono impiegati per tutte le generazioni[4] nella previsione di costo ultimo e, pertanto, si calcola, l'errore quadratico medio di previsione tra due generazioni

$k > i$

$$msep_{C\hat{D}R_i(I+1)+C\hat{D}R_k(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1) + C\hat{D}R_k(I+1)\right) =$$
$$= E\left[\left(\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right) + \left(CDR_k(I+1) - C\hat{D}R_k(I+1)\right)\right)^2 \middle| D_I\right] =$$
$$= msep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_i(I+1)\right) + msep_{C\hat{D}R_k(I+1)|D_I}\left(C\hat{D}R_k(I+1)\right) +$$
$$+ 2E\left[\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right)\left(CDR_k(I+1) - C\hat{D}R_k(I+1)\right)\middle| D_I\right]$$

[4]O meglio i dati delle generazioni anziane servono a calcolare i fattori di sviluppo per quelle più recenti ma non il viceversa. Per questo scomparirà un termine nella dimostrazione seguente.

$$msep_{\hat{CDR}_i(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_i(I+1)\right)+msep_{\hat{CDR}_k(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_k(I+1)\right)+2E\left[CDR_i(I+1)CDR_k(I+1)|D_I\right]+$$
$$-2E\left[\hat{CDR}_i(I+1)CDR_k(I+1)|D_I\right]-2E\left[CDR_i(I+1)\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]+2E\left[\hat{CDR}_i(I+1)\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]=$$
$$=msep_{\hat{CDR}_i(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_i(I+1)\right)+msep_{\hat{CDR}_k(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_k(I+1)\right)-2E\left[CDR_i(I+1)\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]+$$
$$+2E\left[\hat{CDR}_i(I+1)\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]$$

il primo doppio prodotto scompare per l'indipendenza delle generazioni, il secondo come sopradetto in nota perché le stime della generazione più anziana si basano sui fattori delle generazioni precedenti e non sulle osservazioni delle generazioni successive.
Sommando e sottraendo $E\left[\hat{CDR}_i(I+1)|D_I\right]E\left[\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]$ si ottiene

$$msep_{\hat{CDR}_i(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_i(I+1)\right)+msep_{\hat{CDR}_k(I+1)|D_I}\left(\hat{CDR}_k(I+1)\right)+2\left(\psi_{ik}^I+E\left[\hat{CDR}_i(I+1)|D_I\right]E\left[\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right]\right)$$

dove si definisce $\psi_{ik}^I=Cov\left(\hat{CDR}_i(I+1),\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right)-Cov\left(CDR_i(I+1),\hat{CDR}_k(I+1)|D_I\right)$

La prima fase di lavoro riguarda il termine di errore tra due generazioni; si utilizzano di nuovo le proprietà A) e C) del lemma MWL
$k>i>1$

$$
\begin{aligned}
\psi_{ik}^{I} &= Cov\left(C\hat{D}R_i(I+1) - CDR_i(I+1), C\hat{D}R_k(I+1) \middle| D_I\right) = Cov\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1} - E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right], \hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right) = \\
&= E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1} - E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right]\right)\hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right] - E\left[\hat{C}_{i,J}^{I+1} - E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right]\middle|D_I\right]E\left[\hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right] = \\
&= E\left[\hat{C}_{i,J}^{I+1}\hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right] - E\left[E\left[C_{i,J}\middle|D_{I+1}\right]\hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right] - E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] C_{i,I-i} f_{I-i}\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^{I}\right) = \\
&= E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{I-i-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]E\left[C_{i,I-i+1}\prod_{j=I-k+1}^{J-1}\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j + \\
&- E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] C_{i,I-i} f_{I-i}\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^{I}\right) = \\
&= E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{I-i-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] + \\
&- E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{\substack{j=I-k+1 \\ j\neq I-i}}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \, E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right] + \\
&- E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] C_{i,I-i} f_{I-i}\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{f}_j^{I}\right) = \\
&= E\left[C_{k,I-k+1}\middle|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{I-i-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right] \times \\
&\left[\begin{array}{l}
E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right]\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2\middle|D_I\right] - \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \, E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]\right) \\
- E\left[C_{i,I-i+1}\middle|D_I\right]E\left[\hat{f}_{I-i}^{I+1}\middle|D_I\right]\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]^2 - \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j \, E\left[\hat{f}_j^{I+1}\middle|D_I\right]\right)
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

per la stima di psi a questo punto utilizzando le proprietà B), E) ed F) del Lemma MWL è possibile sostituire le stime dei momenti condizionati ad I del coefficiente al tempo I+1 – oltre alle stime dei fattori e delle varianza al tempo I – così da ottenere, sempre tenendo anche conto del criterio di approssimazione e del fatto che il secondo prodotto a destra della precedente si annulla

$$
\hat{\psi}^I_{ik} = \hat{C}^I_{k,I-i}\left[\frac{1}{S^{I+1}_{I-i}}\left(\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C^2_{i,I-i} + \hat{\sigma}^2_{I-i} C_{i,I-i} + S^{I+1}_{I-i+1}\hat{f}^I_{I-i} C_{i,I-i}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\hat{f}^I_j\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2}\right) - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}^I_j\right)^2\right)\right] =
$$

$$
= \hat{C}^I_{k,I-i}\left[\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C_{i,I-i}\left(\frac{C_{i,I-i}}{S^{I+1}_{I-i}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{S^{I+1}_{I-i}} + \frac{S^{I+1}_{I-i+1}}{S^{I+1}_{I-i}\hat{f}^I_{I-i}}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\hat{f}^I_j\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}^2_j C_{I-j,j}}{\left(S^{I+1}_j\right)^2}\right) - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}^I_j\right)^2\right)\right] =
$$

$$
= \hat{C}^I_{k,I-i}\left[\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2 C_{i,I-i}\left(\frac{C_{i,I-i}}{\sum_{k=0}^{i} C_{k,I-i}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{S^{I+1}_{I-i}} + \frac{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i+1}\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}}{\sum_{k=0}^{i} C_{k,I-i}\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i+1}}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}^I_j\right)^2\left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} C_{I-j,j}\right) - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}^I_j\right)^2\right)\right] =
$$

$$
= \hat{C}^I_{k,J}\,\hat{C}^I_{i,J}\left[\left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}\Big/\left(\hat{f}^I_{I-i}\right)^2}{S^{I+1}_{I-i}}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{\left(S^{I+1}_j\right)^2} C_{I-j,j}\right) - 1\right)\right] \approx
$$

$$
\approx \hat{C}^I_{k,J}\,\hat{C}^I_{i,J}\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}^2_j\Big/\left(\hat{f}^I_j\right)^2}{C_{I-j,j}}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j}\right)^2 = \hat{C}^I_{k,J}\,\hat{C}^I_{k,J}\,\hat{\Phi}^I_{i,J}
$$

Per il termine di errore tra le due generazioni (seconda fase del lavoro) si ricorre sempre alla tecnica di ricampionamento condizionato; prima si calcola la seguente espressione con l’ausilio delle proprietà B) e C) del Lemma MWL

$$
E\left\lfloor C\hat{D}R_i(I+1)\middle| D_I\right\rfloor E\left\lfloor C\hat{D}R_k(I+1)\middle| D_I\right\rfloor =
$$

$$
= C_{i,I-i}C_{k,I-k}\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j - f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S^I_j}{S^{I+1}_j}\hat{f}^I_j + f_j\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j}\right)\right)\left(\prod_{j=I-k}^{J-1}\hat{f}^I_j - f_{I-k}\prod_{j=I-k+1}^{J-1}\left(\frac{S^I_j}{S^{I+1}_j}\hat{f}^I_j + f_j\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j}\right)\right)
$$

poi si media tale grandezza e si mette in evidenza un prodotto utilizzando la proprietà B)

$$
E\left\lfloor E\left\lfloor C\hat{D}R_i(I+1)\middle| D_I\right\rfloor E\left\lfloor C\hat{D}R_k(I+1)\middle| D_I\right\rfloor\right\rfloor =
$$

$$
= C_{i,I-i}C_{k,I-k}E\left[\left(\prod_{j=I-i}^{J-1}\hat{f}^I_j - f_{I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S^I_j}{S^{I+1}_j}\hat{f}^I_j + f_j\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j}\right)\right)\left(\prod_{j=I-k}^{J-1}\hat{f}^I_j - f_{I-k}\prod_{j=I-k+1}^{J-1}\left(\frac{S^I_j}{S^{I+1}_j}\hat{f}^I_j + f_j\frac{C_{I-j,j}}{S^{I+1}_j}\right)\right)\middle| D_I\right] =
$$

$$
= C_{i,I-i}C_{k,I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1} f_j H
$$

e si sviluppa H

$$
\begin{aligned}
H = {} & \prod_{j=I-i}^{J-1} E\left[\left(\hat f_j^I\right)^2 \middle| D_I\right] + f_{I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat f_j^I + f_j \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \middle| D_I\right] \\
& - f_{I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat f_j^I \left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat f_j^I + f_j \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right) \middle| D_I\right] - \prod_{j=I-i}^{J-1} E\left[\hat f_j^I \left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\hat f_j^I + f_j \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right) \middle| D_I\right] = \\
= {} & \left\{\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right) + f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right) - f_{I-i}^2\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right) - \prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2}{S_j^I}+f_j^2\right)\right\} = \\
= {} & \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left\{\prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right) + \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right) - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right) - \prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}+1\right)\right\} \approx \\
\approx {} & \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left\{\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I} - \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I} - \sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right\} = \\
= {} & \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left\{\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I} - \frac{S_{I-i}^I}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(1-\frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right\} = \\
= {} & \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left\{\frac{C_{i.I-i}}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j.j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right\} = \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \Lambda_{i,J}
\end{aligned}
$$

in modo da ottenere

$$
\begin{aligned}
& E\left[E\left[C\hat DR_i(I+1)\middle|D_I\right]E\left[C\hat DR_k(I+1)\middle|D_I\right]\middle|D_I\right] = \\
& = C_{i,I-i}C_{k,I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1} f_j \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \left\{\frac{C_{i.I-i}}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j.j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\sigma_j^2/f_j^2}{S_j^I}\right\} = \\
& = C_{i,I-i}C_{k,I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1} f_j \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 \Lambda_{i,J}
\end{aligned}
$$

e, infine, si calcola la corrispondente stima di lambda

$$
\hat\Lambda_{i,J} = \frac{C_{i.I-i}}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\hat\sigma_{I-i}^2/\left(f_{I-i}^I\right)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j.j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\hat\sigma_j^2/\left(f_j^I\right)^2}{S_j^I}
$$

$$
\hat E\left[C\hat DR_i(I+1)\middle|D_I\right]E\left[C\hat DR_k(I+1)\middle|D_I\right] = C_{i,I-i}C_{k,I-k}\prod_{j=I-k}^{I-i-1}\hat f_j^I \prod_{j=I-i}^{J-1}\left(\hat f_j^I\right)\hat\Lambda_{i,J} = \hat C_{i,J}^I \hat C_{k,J}^I \hat\Lambda_{i,J}
$$

ottenendo così un’approssimazione dell’errore quadratico medio totale generazioni del saldo osservato

$$
\begin{aligned}
& m\hat sep_{\sum_{I=1}^{I} C\hat DR_i(I+1)|D_I}\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat DR_i(I+1)\right) = E\left[\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat DR_i(I+1) - \sum_{I=1}^{I} C\hat DR_i(I+1)\right)^2 \middle| D_I\right] = \\
& = \sum_{I=1}^{I} m\hat sep_{C\hat DR_i(I+1)|D_I}\left(C\hat DR_i(I+1)\right) + 2\sum_{k>i>0}\hat C_{i,J}^I \hat C_{k,J}^I\left(\hat\Lambda_{i,J} + \hat\Phi_{i,J}^I\right)
\end{aligned}
$$

3.7.2 PERSPECTIVE VIEW

Il passaggio all'errore quadratico medio per totale generazioni dal saldo 0 è più complesso di quello per generazione. Si sviluppa inizialmente l'errore

$$msep_{\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = E\left[\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2 |D_I\right] =$$

$$= Var\left(\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right) + E\left[\sum_{I=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right]^2$$

il termine di varianza totale dello stimatore CDR dal saldo 0 si scompone a sua volta in somma delle varianze e somma delle covarianze;

$$Var\left(\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right) = \sum_{i=1}^{I} Var\left(C\hat{D}R_i(I+1)|D_I\right) + 2\sum_{k>i}^{I} Cov\left(C\hat{D}R_i(I+1), C\hat{D}R_k(I+1)|D_I\right)$$

la prima già sviluppata per il calcolo di phi

$$Var\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1}|D_I\right) = E\left[C_{i,I-i+1}^2|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2|D_I\right] - E\left[C_{i,I-i+1}|D_I\right]^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right]^2 =$$

$$= \left(f_{I-i}^2 C_{i,I-i}^2 + \sigma_{I-i}^2 C_{i,I-i}\right)\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2|D_I\right] - f_{I-i}^2 C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right]^2$$

si stima con l'espressione

$$V\hat{a}r\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1}|D_I\right) = \left(\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2 C_{i,I-i}^2 + \hat{\sigma}_{I-i}^2 C_{i,I-i}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2 + \frac{\hat{\sigma}_j^2 C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}\right)\right) - \left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2 C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2 =$$

$$= \left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2 C_{i,I-i}^2\left[\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} C_{I-j,j}\right)\right) - \prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left[\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}\right)\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} C_{I-j,j}\right)\right) - 1\right] \approx$$

$$\approx \left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left[\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}\right)\left(\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} C_{I-j,j} + 1\right) - 1\right] \approx$$

$$\approx \left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left[\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} C_{I-j,j}\right] = \left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2 \hat{\Gamma}_{i,J}^{I}$$

diversamente la covarianza

$$Cov\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1}, \hat{C}_{k,J}^{I+1}|D_I\right) = E\left[C_{k,I-k+1}|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{I-i-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right] E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2|D_I\right]$$

$$- E\left[C_{k,I-k+1}|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right] E\left[C_{i,I-i+1}|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right] =$$

$$= E\left[C_{k,I-k+1}|D_I\right]\prod_{j=I-k+1}^{I-i-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right]\left[E\left[C_{i,I-i+1}\hat{f}_{I-i}^{I+1}|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\left(\hat{f}_j^{I+1}\right)^2|D_I\right] - E\left[C_{i,I-i+1}|D_I\right] E\left[\hat{f}_{I-1}^{I+1}|D_I\right]\prod_{j=I-i+1}^{J-1} E\left[\hat{f}_j^{I+1}|D_I\right]^2\right]$$

si stima con la seguente utilizzando la proprietà F) e la dimostrazione per la stima di psi

$$C\hat{o}v\left(\hat{C}_{i,J}^{I+1},\hat{C}_{k,J}^{I+1}\middle|D_I\right)=\hat{C}_{k,I-i}^{I}\left[\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2 C_{i,I-i}\left(1+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I+1}}\right)\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2+\frac{\hat{\sigma}_j^2 C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}\right)-\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2 C_{i,I-i}\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2\right]=$$

$$=\hat{C}_{k,J}^{I}\hat{C}_{i,J}^{I}\left[\left(1+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I+1}}\right)\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(1+\frac{\hat{\sigma}_j^2 C_{I-j,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}\right)-1\right]\approx$$

$$\approx\hat{C}_{k,J}^{I}\hat{C}_{i,J}^{I}\left[\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I+1}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{\left(S_j^{I+1}\right)^2}C_{I-j,j}\right]=\hat{C}_{k,J}^{I}\hat{C}_{i,J}^{I}\hat{\Xi}_{i,J}^{I}$$

il termine di errore totale dello stimatore CDR dal saldo 0 si ricava dalle dimostrazioni precedenti (delta e lambda)

$$\hat{E}\left[E\left[\sum_{i=1}^{I}C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right]^2 D_I\right]=\sum_{i=1}^{I}\hat{E}\left[E\left[C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right]^2\middle|D_I\right]+2\sum_{k>i}^{I}\hat{E}\left[E\left[C\hat{D}R_i(I+1)\middle|D_I\right]E\left[C\hat{D}R_k(I+1)\middle|D_I\right]D_I\right]$$

ed infine si ha la stima dell'errore quadratico medio totale dal saldo 0

$$m\hat{s}ep_{\sum_{I=1}^{I}C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)=E\left[\left(\sum_{I=1}^{I}C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2\middle|D_I\right]=$$

$$=\sum_{I=1}^{I}m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)+2\sum_{k>i>0}\hat{C}_{i,J}^{I}\hat{C}_{k,J}^{I}\left(\hat{\Lambda}_{i,J}+\hat{\Xi}_{i,J}^{I}\right)$$

3.8 MSEP CDR VS MSEP MACK

Risulta utile riscrivere ed interpretare i risultati in termini di modello di Mack

STIMA DELL'ERRORE QUADRATICO MEDIO PER GENERAZIONE DAL SALDO 0

$$m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)=\left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left(\hat{\Gamma}_{i,J}^{I}+\hat{\Delta}_{i,J}^{I}\right)=$$

$$=\left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{C_{I-j,j}}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I}}+\left[\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{S_j^{I}}\right]\right)=$$

$$=\left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\left(\frac{1}{C_{I-j,j}}+\frac{1}{S_j^{I}}\right)+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I}}\right)=$$

$$=\left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\left(\frac{S_j^{I}+C_{I-j,j}}{C_{I-j,j}S_j^{I}}\right)+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I}}\right)=$$

$$=\left(\hat{C}_{i,J}^{I}\right)^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{C_{i,I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}_j^2\Big/\left(\hat{f}_j^{I}\right)^2}{S_j^{I}}\right)+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2\Big/\left(\hat{f}_{I-i}^{I}\right)^2}{S_{I-i}^{I}}\right)$$

rispetto a Mack (vedi seguente) si considera solo il primo termine della varianza di processo mentre, per l'errore di parametro, solo la diagonale futura viene pienamente considerata e le rimanenti celle vengono scalate per un termine inferiore all'unità

$$m\hat{s}ep_{\hat{C}_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}_{i,J}\right)=\hat{C}_{i,J}^{2}\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\left(\hat{f}_j^I\right)^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}}+\frac{1}{S_j^I}\right)$$

STIMA DELL'ERRORE QUADRATICO MEDIO DEL TOTALE GENERAZIONI DAL SALDO 0

$$m\hat{s}ep_{\sum_{I=1}^{I}C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)=\sum_{I=1}^{I}m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)+2\sum_{k>i>0}\hat{C}_{i,J}^I\hat{C}_{k,J}^I\left(\hat{\Lambda}_{i,J}+\hat{\Xi}_{i,J}^I\right)=\sum_{I=1}^{I}m\hat{s}ep_{\sum_{I=1}^{I}C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)+$$

$$+2\sum_{k>i>0}\hat{C}_{i,J}^I\hat{C}_{k,J}^I\left(\frac{C_{i.I-i}}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{C_{I-j,j}}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\left(\hat{f}_{I-i}^I\right)^2}{S_{I-i}^{I+1}}\right)=$$

$$=\sum_{I=1}^{I}m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)+2\sum_{k>i>0}\hat{C}_{i,J}^I\hat{C}_{k,J}^I\left(\frac{C_{i.I-i}+S_{I-i}^I}{S_{I-i}^{I+1}}\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}\right)\right)=$$

$$=\sum_{I=1}^{I}m\hat{s}ep_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0)+2\sum_{k>i>0}\hat{C}_{i,J}^I\hat{C}_{k,J}^I\left(\frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{S_{I-i}^I}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}\right)\right)$$

Alla terza espressone si perviene in quanto $\frac{1}{S_j^I}+\frac{1}{C_{I-j,j}}=\frac{S_j^I+C_{I-j,j}}{S_j^IC_{I-j,j}}=\frac{S_j^{I+1}}{S_j^IC_{I-j,j}}$;

rispetto a Mack (vedi seguente), per l'errore di parametro, solo la diagonale futura viene pienamente considerata e le rimanenti celle vengono scalate per un termine

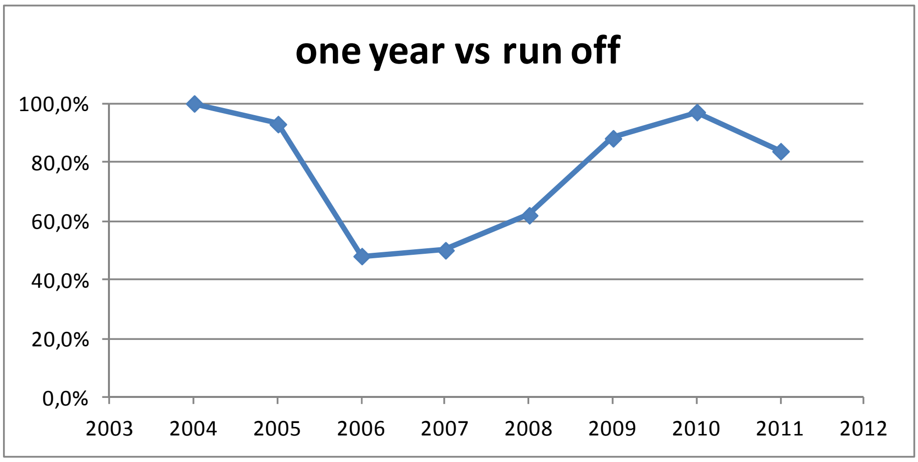
$$msep_{\sum_{i=1}^{J}C_{i,J}|D_I}\left(\sum_{i=1}^{J}\hat{C}_{i,J}^I\right)=\sum_{i=1}^{J}m\hat{s}ep_{C_{i,J}|D_I}\left(\hat{C}_{i,J}^I\right)+2\sum_{k>i}\hat{C}_{i,J}^I\hat{C}_{k,J}^I\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2/\left(\hat{f}_j^I\right)^2}{S_j^I}$$

3.9 ESEMPIO

Per il ramo infortuni riportato in precedenza, si rappresentano i risultati (come radice quadrata *rmsep*) con dati dell'esercizio 2011 dell'applicazione del modello, dal quale emerge la caratterizzazione di ramo *short tail* a causa della grande volatilità, in termini di scostamento quadratico medio *rmsep (root mean square error of prediction)*, spiegata dal CDR rispetto al *runoff*.

		1-year view	1-year view	ult view	
generazioni	**stima di riserva**	**rmsep CDR**	**rmsep 0**	**rmsepMack**	**rmsep 0 vs rmsepMack**
2004	119.199	54.777	77.232	77.232	100,0%
2005	291.929	102.901	169.021	181.770	93,0%
2006	488.148	75.259	93.140	193.625	48,1%
2007	760.159	78.119	104.397	208.423	50,1%
2008	1.389.925	92.630	156.301	252.215	62,0%
2009	3.637.196	177.284	436.952	495.720	88,1%
2010	12.644.589	677.096	1.932.727	1.991.545	97,0%
2011	40.607.242	967.979	2.940.729	3.509.923	83,8%
rCov		589.979	1.141.674	1.272.385	89,7%
Totale	**59.938.387**	**1.344.948**	**3.735.800**	**4.281.830**	**87,2%**

Tale volatilità *one year vs run off* riferita alla specifica generazione decresce in corrispondenza delle generazioni di antidurata media per poi riassestarsi su livelli elevati per le generazioni più recenti.



Diversamente la volatilità relativa in termini di *best estimate* decresce più o meno con regolarità per le generazioni più recenti sia con riferimento all'orizzonte temporale di un anno che nell'ottica di smontamento totale della riserva.

		1-year view	1-year view	ult view	ult view
generazioni	stima di riserva	rmsep 0	rmsep 0 %	rmsepMack	rmsepMack %
2004	119.199	77.232	64,8%	77.232	64,8%
2005	291.929	169.021	57,9%	181.770	62,3%
2006	488.148	93.140	19,1%	193.625	39,7%
2007	760.159	104.397	13,7%	208.423	27,4%
2008	1.389.925	156.301	11,2%	252.215	18,1%
2009	3.637.196	436.952	12,0%	495.720	13,6%
2010	12.644.589	1.932.727	15,3%	1.991.545	15,8%
2011	40.607.242	2.940.729	7,2%	3.509.923	8,6%
rCov		1.141.674		1.272.385	
Totale	**59.938.387**	**3.735.800**	**6,2%**	**4.281.830**	**7,1%**

3.10 CONCLUSIONI

Il modello di Merz e Wüthrich ha introdotto la possibilità di misurare la volatilità a un anno e, avendo a disposizione (insieme al valore centrale) due momenti è possibile effettuare un'ipotesi distributiva (es. lognormale) tale da ricavarne (la maggior parte delle distribuzioni è identificata da due soli parametri) i corrispondenti percentili. Inoltre la necessità di ottenere una distribuzione empirica ha dato l'impulso ad uno sviluppo di tecniche simulative per estendere detta possibilità sia a questo modello che ad altri (vedasi [7] e [8]). Non va peraltro trascurata la possibilità di calcolare altre proprietà come quelle di MWL per determinare anche indici di asimmetria della distribuzione. Infine si ricorda che dal marzo 2015 è presente nel *package chainladder* compatibile con l'ultima versione del software R una funzione che consente l'implementazione immediata del modello con la rappresentazione in tabelle e grafici dei risultati.

BIBLIOGRAFIA

[1] Mack T. (1993), Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates, ASTIN Bulletin, 23, 213-225.

[2] Merz. M. e Wüthrich M. (2007), Prediction error of the expected claims development result in Bulletin Swiss Assoc. Act., no. 1, 117-137.

[3] Merz. M. e Wüthrich M. (2008), Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance, Wiley Finance.

[4] Merz. M. e Wüthrich M. (2008), Modelling the claims development result for solvency purposes,*CAS E-Forum*, Fall, 542-568.

[5] Merz. M. e Wüthrich M. e Lysenko N. (2009), Uncertainty in the claims development result in the chain ladder method, *Scand. Actuar. J.* 109, no. 1, 63-84.

[6] Bühlmann H., De Felice M., Gisler A., Moriconi F., Wüthrich M. (2009), Recursive Credibility Formula for Chain Ladder Factors and the Claims Development Result, Astin Bulletin, 39, 275-306.

[7] Ohlsson, E. e Lauzeningks, J: (2008), The one-year non-life insurance risk, Insurance: Mathematics and Economics 45, 203-208.

[8] England P. (2009), The Ultimate and One-Year Views of Reserving Risk with Respect to Solvency and Risk Margins, Casualty Actuaries of Europe, Fall Meeting.